素数定理の証明

東森秀明　2023/04/27

概要

素数pは累乗p^nの形で全自然数中に無限に存在する．

ところが，全自然数中の素数pの累乗の存在比は$\frac{1}{\ln p}$である．

それ故，素数pは全自然数中に存在比$\frac{1}{\ln p}$で存在する．

他方，自然数pは素数p又は合成数pとして全自然数中に存在する．

そうすると，自然数pは素数pとして全自然数中に存在比$\frac{1}{\ln p}$で存在する．

つまり，自然数pは存在比 (確率) $\frac{1}{\ln p}$で素数pである．

したがって，素数計数関数$\pi(x)$は上記確率$\frac{1}{\ln p}$の積分により得られる．

始めに

素数pは累乗p^nの形で全自然数中に無限に存在する．

ところが，全自然数中の素数pの累乗の存在比は$\frac{1}{\ln p}$である．

それ故，素数pは全自然数中に存在比$\frac{1}{\ln p}$で存在する．

他方，自然数pは素数p又は合成数pとして全自然数中に存在する．

そうすると，自然数pは素数pとして全自然数中に存在比$\frac{1}{\ln p}$で存在する．

つまり，自然数pは存在比 (確率) $\frac{1}{\ln p}$で素数pである．

したがって，素数計数関数$\pi(x)$は上記確率$\frac{1}{\ln p}$の積分により得られる．

存在比$\frac{1}{\ln p}$の導出

素数pの累乗p^nに対して下記不等式を成立させる自然数mとnは必ず存在する．

eは自然対数の底（ネイピア数）である．

$$e^m < p^n < e^{m+1}$$

対数に変換すると，次の不等式が成立する．

$$m < n\ln p < (m+1) \qquad \ln e = 1$$

$$1 < \frac{n\ln p}{m} < (1+\frac{1}{m})$$

自然数mを無限大にしたとき，次の等式が成立する．

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n\ln p}{m}=1$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m} = \frac{1}{\ln p}$$

素数pの累乗p^nと自然数eの累乗e^mは以下のように存在する．

$$e^m < p^n < e^{m+1}$$

$$p^1 \ \ p^2 \ \ p^3 \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ p^n \ \ p^{n-1} \ \ p^n$$

$$e^1 \ \ e^2 \ \ e^3 \ \ e^4 \ \ e^5 \ \ e^6 \ \ \ldots\ldots \ \ \ldots\ldots \ \ \ldots\ldots \ \ \ldots\ldots \ \ e^{m-5} \ \ e^{m-4} \ \ e^{m-3} \ \ e^{m-2} \ \ e^{m-1} \ \ e^m$$

したがって，存在比$\frac{n}{m}$は自然数e^m中の素数pの存在比である．

そうすると，$\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}$は全自然数中の素数$p$の存在比$\frac{1}{\ln p}$である．

つまり，素数pは全自然数中に存在比$\frac{1}{\ln p}$で存在する．

他方，自然数pは素数p又は合成数pとして全自然数中に存在する．

そうすると，自然数pは素数pとして全自然数中に存在比$\frac{1}{\ln p}$で存在する．

簡単に言えば，自然数pは存在比$\frac{1}{\ln p}$で素数pである．

つまり，存在比$\frac{1}{\ln p}$は自然数pが素数pである確率である．

素数計数関数$\boldsymbol{\pi(x)}$の導出

素数計数関数$\pi(x)$は確率$\frac{1}{\ln p}$の積分により下記の如く得られる．

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{\ln p}\right) = \frac{1}{\ln p} - \frac{p}{(\ln p)^2}\frac{1}{p}$$

$$= \frac{1}{\ln p} - \frac{1}{(\ln p)^2}$$

$$\frac{1}{\ln p} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p}{\ln p}\right) + \frac{1}{(\ln p)^2}$$

$$\pi(x)=\int_2^x \frac{1}{\ln p}dp=\int_2^x \frac{d}{dp}\left(\frac{p}{\ln p}\right)dp+\int_2^x \frac{1}{(\ln p)^2}dp$$

$$\pi(x)=\int_2^x \frac{1}{\ln p}dp=\frac{x}{\ln x}+\int_2^x \frac{1}{(\ln p)^2}dp$$

$$\int_2^x \frac{1}{(\ln p)^2}dp=\frac{x}{(\ln x)^2}+2\int_2^x \frac{1}{(\ln p)^3}dp$$

$$\pi(x)=\int_2^x \frac{1}{\ln p}dp=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{(\ln x)^2}+2\int_2^x \frac{1}{(\ln p)^3}dp$$

$$2\int_2^x \frac{1}{(\ln p)^3}dp=\frac{2x}{(\ln x)^3}+6\int_2^x \frac{1}{(\ln p)^4}dp$$

$$\pi(x)=\int_2^x \frac{1}{\ln p}dp=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+6\int_2^x \frac{1}{(\ln p)^4}dp$$

$$\pi(x)=\int_2^x \frac{1}{\ln p}dp=\frac{x}{\ln x}+\sum_{n=1}^{m}\frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{m!x}{(\ln x)^{m+1}}\right)=\frac{m!}{(\ln x)^{m+1}}-\frac{(m+1)!x}{(\ln x)^{m+2}}\frac{1}{x}=0$$

$$1-\frac{m+1}{\ln x}=0 \qquad m=\ln x-1$$

以上のように，上記素数計数関数$\pi(x)$の近似計算は関数電卓により可能である．

以下に 5 例を提示する．

$$x=10^2 \qquad m=\ln x-1=\ln 10^2-1=3.60517018$$

$$\pi(x)-\frac{x}{\ln x}=3.$$ (Wikipedia)

$$\frac{x}{(\ln x)^2}=\frac{10^2}{(\ln 10^2)^2}=4.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}=\frac{10^2}{(\ln 10^2)^2}+\frac{2\times 10^2}{(\ln 10^2)^3}=6.$$

$$x=10^3 \qquad m=\ln x-1=\ln 10^3-1=5.$$

$$\pi(x)-\frac{x}{\ln x}=23$$ (Wikipedia)

$$\frac{x}{(\ln x)^2}=\frac{10^3}{(\ln 10^3)^2}=20.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}=\frac{10^3}{(\ln 10^3)^2}+\frac{2\times 10^3}{(\ln 10^3)^3}=27.$$

$$x=10^{10} \qquad m=\ln x-1=\ln 10^{10}-1=22.$$

(Wikipedia) $\pi(x)-\frac{x}{\ln x}=20{,}758{,}029.$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}=\frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2}+\frac{2\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^3}=20{,}499{,}430.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2}+\frac{2\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^3}+\frac{6\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^4}=20{,}712{,}876.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2}+\cdots+\frac{24\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^5}=20{,}749{,}955.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2}+\cdots+\frac{120\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^6}=20{,}758{,}006.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2}+\cdots+\frac{720\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^7}=20{,}760{,}104.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2}+\cdots+\frac{5040\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^8}=20{,}760{,}741.$$

$$x=10^{20} \qquad m=\ln x-1=\ln 10^{20}-1=45.$$

$$\pi(x)-\frac{x}{\ln x}=49{,}347{,}193{,}044{,}659{,}701.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}=\frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2}=47{,}152{,}924{,}252{,}903{,}482.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}=\frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2}+\frac{2\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^3}=49{,}200{,}749{,}733{,}767{,}281.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2}+\cdots+\frac{6\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^4}=49{,}334{,}153{,}629{,}703{,}285.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2}+\cdots+\frac{24\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^5}=49{,}345{,}740{,}944{,}877{,}165.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2}+\cdots+\frac{120\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^6}=49{,}346{,}999{,}021{,}637{,}187.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2}+\cdots+\frac{720\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^7}=49{,}347{,}162{,}934{,}375{,}593.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2}+\cdots+\frac{5040\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^8}=49{,}347{,}187{,}849{,}614{,}824.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2}+\cdots+\frac{40320\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^9}=49{,}347{,}192{,}177{,}835{,}189.$$

$$x=10^{28}\quad m=\ln x-1=\ln 10^{28}-1=63.$$

$$\pi(x)-\frac{x}{\ln x}=2{,}484{,}097{,}167{,}669{,}186{,}251{,}622{,}127.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}=\frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2}=2{,}405{,}761{,}441{,}474{,}667{,}464{,}540{,}316.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}+\frac{2x}{(\ln x)^3}=\frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2}+\frac{2\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^3}=2{,}480{,}390{,}649{,}960{,}957{,}535{,}973{,}511.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}\dots+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2}\dots+\frac{6\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^4}=2{,}483{,}863{,}262{,}828{,}929{,}297{,}882{,}432.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}\dots+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2}\dots+\frac{24\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^5}=2{,}483{,}917{,}124{,}850{,}584{,}525{,}088{,}882.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}\dots+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2}\dots+\frac{120\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^6}=2{,}483{,}933{,}833{,}406{,}862{,}395{,}538{,}927.$$

$$\frac{x}{(\ln x)^2}\dots+\frac{6x}{(\ln x)^4}=\frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2}\dots+\frac{720\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^7}=2{,}483{,}935{,}388{,}356{,}960{,}691{,}768{,}830.$$

以上の 5 例から判るように，$x<10^{10}$では，$\pi(x)$は実際よりも多めに素数計数される．

ただ， $x>10^{10}$では，$m=\ln x-1$まで計算すると，$\pi(x)$は実際の素数計数になることが予想される．

以上のとおり，存在比$\frac{1}{\ln p}$は自然数pが素数pである確率であることが実証された．

参考文献

1. Erdős, Paul (1949-07-01), "On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem,", Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.A.: National Academy of Sciences) 35 (7): 374-384, doi:10.1073/pnas.35.7.374