素数定理の証明

東森秀朋　2022/10/03

概要

従来，素数定理は自然数pが素数である確率を直接に求めることにより証明された．

本稿では，自然数中の素数pの存在比から，全自然数中の素数pの存在比，即ち，素数pの存在確率を求める．

この素数pの存在確率は自然数pが素数である確率と同じである．

始めに

素数pはその累乗の形で全自然数中に無数に存在する．ところが，自然数中の素数pの存在比から，全自然数中の素数pの存在比，即ち，素数pの存在確率を求めることができる．この素数pの存在確率は自然数pが素数である確率と同じである．

存在比の導出

素数の累乗p^nに対して下記不等式を成立させる整数の指数mは必ず存在する．

eは自然対数の底（ネイピア数）である．

$$e^m < p^n < e^{m+1}$$

両辺の対数をとると次の不等式が成立する．

$$m < n\ln p < (m+1) \qquad \ln e = 1$$

$$1 < \frac{n\ln p}{m} < (1+\frac{1}{m})$$

指数mを無限大にしたとき，次の等式が成立する．

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n\ln p}{m}=1$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}=\frac{1}{\ln p}$$

素数pの累乗とeの累乗は自然数e^{m+1}中に以下に示すように存在する．

$$p^n \cong e^m$$

p^1　　p^2　　p^3　　p^4…………………　p^{n-3}　　p^{n-2}　　p^{n-1}　　p^n

e^1　e^2　e^3　e^4　e^5　e^6　…………………e^{m-5}　e^{m-4}　e^{m-3}　e^{m-2}　e^{m-1}　e^m

指数比$\frac{n}{m}$は，自然数e^m中の素数pの累乗の個数nとeの累乗の個数mの比であるから，素数pの自然数e^m中の存在比である．

そうすると，$\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}$は全自然数$\lim_{m\to\infty} e^m$中の素数$p$の存在比である．

ところが，上記「全自然数$\lim_{m\to\infty} e^m$中の素数pの存在比」は「全自然数$\lim_{m\to\infty} e^m$中の素数pの存在確率」である．

したがって，全自然数$\lim_{m\to\infty} e^m$中の素数pの存在確率は$\frac{1}{\ln p}$である．

そして，素数pの存在確率$\frac{1}{\ln p}$は自然数pが素数である確率と同じである．

素数計数関数$\boldsymbol{\pi(x)}$の導出

素数計数関数$\pi(x)$は自然数pが素数である確率$\frac{1}{\ln p}$を積分することにより次の如く得られる．

$$\pi(x) = \int_2^x \left(\frac{1}{\ln p}\right) dp \cong x/\ln x$$

以上の如く素数定理は証明された．

参考文献

1. Erdős, Paul (1949-07-01), "On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem,", Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.A.: National Academy of Sciences) 35 (7): 374-384, doi:10.1073/pnas.35.7.374

補足

$$e^m < p_1^{n_1}\ p_2^{n_2}\ p_3^{n_3}\ p_4^{n_4}\ p_5^{n_5} \ldots\ldots p_i^{n_i} \ldots\ldots p_{l-4}^{n_{l-4}}\ p_{l-3}^{n_{l-3}}\ p_{l-2}^{n_{l-2}}\ p_{l-1}^{n_{l-1}}\ p_l^{n_l} < e^{m+k}$$

自然数e^mとe^{m+k}の間に存在する全ての素数の累乗$p_i^{n_i}$に対して下記の不等式を成立させる自然数mとkは必ず存在する．

$$1 < \frac{n_i \ln p_i}{m} < (1 + \frac{k}{m})$$

対数に変換すると次の不等式が成立する．

$$\frac{1}{\ln p_i} < \frac{n_i}{m} < (1 + \frac{k}{m})\frac{1}{\ln p_i}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\ln p_i} < \sum_{i=1}^{l} \frac{n_i}{m} < (1 + \frac{k}{m})\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\ln p_i}$$

$\frac{n_i}{m}$は自然数e^{m+k}中の素数の存在確率であるから，次の等式が成立する．

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{n_i}{m} = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\ln p_i} \cong 1$$

$$\sum_{i=1}^{l} n_i \cong m$$