素数の簡潔な生成式

東森秀朋　2020.08.11

要約

自然数の二乗和の公式から素数の生成式を導出する．その生成式は２系列の素数を生成する．あらゆる素数はその２系列の何れかに属する．しかし，その生成式は非素数（素数の倍数）も生成する．そこで，その非素数を取り除く方法について検討する．

１．始めに

自然数の二乗和の公式から素数の生成式を導出する．その生成式は２系列の素数を生成する．あらゆる素数はその２系列の何れかに属する．しかし，その生成式は非素数（素数の倍数）も生成する．そこで，その非素数を取り除く方法について検討する．

２．生成式の導出

自然数の二乗和の公式は次のとおりである．

$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-2)^2 + (k-1)^2 + k^2 = k(K+1)(2k+1)/6$

自然数の二乗和は整数であるから，$k(K+1)(2k+1)$は数6で割り切れる．

$p_k = 2k+1$が素数であるとき，$(2k+1)$は数6で割り切れない．

そのとき，kまたは$k+1$は，いずれかが偶数であるから，数3で割り切れる．

その結果，素数p_kの生成式は次の２系列が存在する．

mは自然数

$k = 3m$　　　$p_k = 2k+1 = 6m+1$

$k+1 = 3m$　　　$p_k = 2k+2-1 = 6m-1$

２系列を区別して以下の如く表記する．

$p_k = 6m+1 = p_{m+}$

$p_k = 6m-1 = p_{m-}$

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p_{m+} = 6m+1 =$	7	13	19	**25**	31	37	43	49	**55**	61	67	73	79
$p_{m-} = 6m-1 =$	5	11	17	23	29	**35**	41	47	53	59	**65**	71	**77**

$m =$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$p_{m+} = 6m+1 =$	**85**	91	97	103	109	**115**	**121**	127	133	139	**145**	151	157

$p_{m-} = 6m - 1 =$ 83 89 **95** 101 107 113 **119** **125** 131 137 **143** 149 **155**

$m =$ 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 25 26
$p_{m+} = 6m + 1 =$ 163 **169** **175** 181 187 193 199 **205** 211 217 223 229 **235**
$p_{m-} = 6m - 1 =$ 161 167 173 179 **185** 191 197 203 209 **215** 221 227 233

以上の如く, すべての素数p_kは自然数mの順に生成される２系列の何れかに属する.

自然数mは無限であるから，２系列は無限に続く.

しかし，太字の非素数（素数の倍数）も生成される.

そこで，その太字の非素数を除去する方法について以下に検討する.

３．非素数の除去

非素数$p_k = p_{m\pm}$（素数$p_{i\pm}$の倍数）に対応する自然数$m = ij$の値は下記の如く算出できる.

$$m = ij$$
$$p_{i+} = 6i + 1$$
$$p_{m+} = 6m + 1 = 6ij + 1 = (6i + 1)j - j + 1 = p_{i+}j - (j - 1)$$
$$j = np_{i+} + 1$$
$$m = ij = i(np_{i+} + 1) = nip_{i+} + i$$
$$p_{m-} = 6m - 1 = 6ij - 1 = (6i + 1)j - j - 1 = p_{i+}j - (j + 1)$$
$$j = np_{i+} - 1$$
$$m = ij = i(np_{i+} - 1) = nip_{i+} - i$$

$$m = ij$$
$$p_{i-} = 6i - 1$$
$$p_{m+} = 6m + 1 = 6ij + 1 = (6i - 1)j + j + 1 = p_{i-}j + (j + 1)$$
$$j = np_{i-} - 1$$
$$m = ij = i(np_{i-} - 1) = nip_{i-} - i$$
$$p_{m-} = 6m - 1 = 6ij - 1 = (6i - 1)j + j - 1 = p_{i-}j + (j - 1)$$
$$j = np_{i-} + 1$$
$$m = ij = i(np_{i-} + 1) = nip_{i-} + i$$

例１

太数字の非素数が素数5の倍数であるとき，その非素数の自然数mの値を求め

る．

nは正の整数

$p_{m+} = 6m + 1 = 5m + m + 1$

$m + 1 = 5n$

$n = \ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \ldots\ldots$

$m = 5n - 1 = \ 4 \quad 9 \quad 14 \quad 19 \quad 24 \quad 29 \quad 34 \ \ldots\ldots$

$p_{m+} = 6m + 1 = 25 \ \ 55 \quad 85 \quad 115 \ \ 145 \ \ 175 \quad 205 \ldots\ldots$

$p_{m-} = 6m - 1 = 5m + m - 1$

$m - 1 = 5n$

$n = \ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \ldots\ldots$

$m = 5n + 1 = \ 6 \quad 11 \quad 16 \quad 21 \quad 26 \quad 31 \quad 36 \ \ldots\ldots$

$p_{m-} = 6m - 1 = 35 \ \ 65 \quad 95 \quad 125 \ \ 155 \ \ 185 \quad 215 \ldots\ldots$

以上の如く，上記自然数mの値で素数5の倍数の非素数が生成される．

例２

非素数が素数11の倍数であるとき，その非素数の自然数mの値を求める．

nは正の整数　　$m = 2m'$

$p_{m+} = 6m + 1 = 12m' + 1 = 11m' + m' + 1$

$m' + 1 = 11n$

$m' = 11n - 1$

$n = \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \ \ldots\ldots$

$m = 2m' = 2(11n - 1) = \quad 20 \quad 42 \quad 64 \quad 86 \quad 108 \quad 130 \ldots\ldots$

$p_{m+} = 6m + 1 = 121 \ \ 253 \quad 385 \ \ 517 \quad 649 \quad 781 \ldots\ldots$

$p_{m-} = 6m - 1 = 12m' - 1 = 11m' + m' - 1$

$m' - 1 = 11n$

$m' = 11n + 1$

$n = \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \ \ldots\ldots$

$m = 2m' = 2(11n + 1) = \quad 24 \quad 46 \quad 68 \quad 90 \quad 112 \quad 134 \ldots\ldots$

$p_{m-} = 6m - 1 = 143 \quad 275 \quad 407 \ \ 539 \quad 671 \quad 803 \ldots\ldots$

以上の如く，上記自然数mの値で素数11の倍数の非素数が生成される．

例３

非素数p_kが素数19の倍数であるとき，その非素数の自然数mの値を求める．

$m = 3m'$

$p_{m+} = 6m + 1 = 18m' + 1 = 19m' - m' + 1$

$m' - 1 = 19n$

$$m' = 19n + 1$$

$$n = \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots\ldots$$

$$m = 3m' = 3(19n + 1) = \quad 60 \quad 117 \quad 174 \quad 231 \ldots\ldots$$

$$p_{m+} = 6m + 1 = 361 \quad 703 \quad 1045 \quad 1387 \quad \ldots\ldots$$

$$p_{m-} = 6m - 1 = 18m' - 1 = 19m' - m' - 1$$

$$m' + 1 = 19n$$

$$m' = 19n - 1$$

$$m = 3m' = 3(19n - 1) = \quad 60 \quad 117 \quad 174 \ldots\ldots$$

$$p_{m-} = 6m - 1 = 361 \quad 703 \quad 1045 \ldots\ldots$$

４．結論

双子素数の生成は素数が２系列で生成されることに起因する．

２系列の数列から非素数 (素数の倍数) を除去することにより２系列の素数列が生成される．

逆に，ある整数が素数か否かを判別するためには，第一にその整数が２系列の何れに該当するか判別し，第二にその整数の自然数mが非素数（素数の倍数）の自然数mに一致するか否かを判定する．

判別すべきある整数が巨大になると，判定すべき非素数の数も膨大になる．

ただ，各非素数の自然数mの計算は上記のように加算，減算そして掛算のみによって可能であるから，計算すべき非素数の数が膨大であってもコンピュータであれば簡単であろう．従来のように割算をしなくて済むことは最大の利点である．