

特殊相対性理論

静止系 (4次元空間) から観測される慣性系 (4次元空間) の物理量は静止系の物理量の慣性系への座標変換したものである。

3次元空間の座標変換において距離が保存される (不変である) のと同様に、時空間 (4次元空間) の上記座標変換においても世界距離 dS^2 は保存される (不変である)。

慣性系は静止系と相対的に速度 U で運動している。質量 m の物体が静止系で静止しているとする。その時、静止系においては時間 dt のみが経過する。

慣性系においては時間 dt' が経過し、その間に物体 m は距離 Udt' だけ移動する。

C : 静止系における光速

C' : 慣性系における光速

U : 静止系と慣性系との相対速度

dt : 静止系において経過した微小時間

dt' : 慣性系において経過した微小時間

m : 物体の質量

$$\beta^2 = U^2/C^2$$

両系における世界距離 dS^2 は等しいから、次の等式 (1) が成立する。

$$-dS^2 = C^2 dt^2 = C^2 dt'^2 - U^2 dt'^2$$

$$dt^2/dt'^2 = 1 - \beta^2$$

$$(1) \quad dt = dt' \sqrt{1 - \beta^2}$$

光の伝播する距離は両系において等しいから、次の等式 (2) が成立する。

$$C'^2 dt'^2 = C^2 dt^2$$

$$C'^2 = C^2 dt^2/dt'^2 = C^2(1 - \beta^2)$$

$$(2) \quad C' = C \sqrt{1 - \beta^2}$$

ここで、物体 m が静止系において速度 v で運動しているとする。

物体 m が運動して移動する距離は両系において等しいから、次の等式 (3) が成立する。物体 m は慣性系において速度 v' で運動しているとする。

$$v'^2 dt'^2 = v^2 dt^2$$

$$v'^2 = v^2(1 - \beta^2)$$

$$(3) \quad v' = v \sqrt{1 - \beta^2}$$

静止系において速度 v で運動している物体 m が力 F によって加速されるとき、慣性系においても物体 m は同じ力 F で加速される。そのとき、次の等式が成立する。

$$v = v'/\sqrt{1 - \beta^2} \quad dt = dt' \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$F = m(dv/dt) = m(dv'/dt') / (1 - \beta^2) = m'(dv'/dt')$$

次の等式 (4) が成立する.

$$(4) \quad m / (1 - \beta^2) = m'$$

それ故, 物体 m が静止系において速度 v で運動すると, 慣性系においては質量 m' の物体が速度 v' で運動しているように見える.

等式 (2) から次の等式は導出される.

$$C'^2 = C^2 - U^2$$

$$mC'^2 = mC^2 - mU^2$$

上記 mU^2 はエネルギーであるから, mC^2 もエネルギーである (補足 4 を参照).
そして, mC^2 のエネルギー量は質量 m のみに依存する.

そうすると, mC^2 それ自体が質量 m のエネルギー量であると言える.

エネルギー量は静止系か慣性系かに関わらずに不変であるから, 等式 (3) と同じ等式が成立する.

$$m'C'^2 = mC^2$$

$$m' = mC^2 / C'^2 = m / (1 - \beta^2)$$

強力な重力場において放出された光の振動数は無限遠方では低くなって観測される. これは光の波長が長くなって観測されるということである. 重力による光の赤方偏移と呼ばれている.

v : 静止系における光の振動数

v' : 慣性系における光の振動数

両系における光の総振動数は等しいから, 上記等式 (3) と同じ等式が成立する.

$$vdt = v'dt' \quad dt = dt' \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$vdt' \sqrt{1 - \beta^2} = v'dt'$$

$$v\sqrt{1 - \beta^2} = v'$$

このような赤方偏移が生じる場合は, 光を放出する物体が観測系 (静止系) に対して高速で相対運動している (接近か否かを問わない) 場合または強力重力場を形成している場合等が考えられる.

ニュートン力学的なドップラー効果は関係ない.

コペルニクスの相対性理論

アインシュタインの重力場方程式のシュバルトシルト解は球対称の重力場の局所空間(局所慣性系)の世界距離 dS^2 を球座標により表現するものである。

しかし、その局所空間(局所慣性系)は完全な慣性系ではない。そのため世界距離 dS^2 は径軸 R の非線形歪を含んでいる。

その局所空間(局所慣性系)では時間 t' が径軸 R 方向に連続的に変化しているために、その世界距離 dS^2 は径軸 R の非線形歪を含まざるを得ないからである。

しかし、世界距離 dS^2 は径軸 R の非線形歪を含むために、光や物体の重力場における運動を描写することが非常に困難である。

そこで、以下では、局所空間(局所慣性系)では時間 t' の径軸 R 方向の連続的な変化にしたがって光はその速度 C' と伝播方向を変えながら伝播すると想定することにより前記困難を解消するものである。

何故なら、局所空間(局所慣性系)の径軸 R は非線形に歪ませる必要がないからである。

まず、局所空間(局所慣性系)における時間 t' と光速 C' について検討する。

局所空間(局所慣性系)は静止系(非重力場)に対して速度 $U(R)$ で運動しているとする。その局所空間(局所慣性系)は C (光速)を係数とする時間軸 t' と径軸 R と回転角 θ とを有する3次元空間で表現される。静止系(非重力場)は C (光速)を係数とする時間軸 t と径軸 R と回転角 θ とを有する3次元空間で表現される。

静止系から局所慣性系への座標変換(ローレンツ変換)において、世界距離 dS^2 は保存される。

それ故、次の等式が成立する

C' : 局所慣性系における光速

C : 静止系における光速

dt' : 局所慣性系における経過時間

dt : 静止系における時間経過

i : 虚数 $i^2 = -1$

dS^2 : 時間 dt だけが経過する静止系における世界距離

dS'^2 : 時間 dt' が経過するとともに距離 $U(R)dt'$ だけ移動する局所慣性系における世界距離。

$$dS^2 = (iCdt)^2$$

$$dS'^2 = (iCdt')^2 + (U(R)dt')^2$$

$$dS^2 = dS'^2$$

$$(iCdt)^2 = (iCdt')^2 + (U(R)dt')^2$$

光が伝播する距離は両系で同一であるから，次の等式が成立する．

$$C'dt' = Cdt$$

上記等式は次の等式（４）を導出する．

$$(4) \quad C'^2 = C^2 - U^2, \quad U = U(R)$$

物体 $m (\ll M)$ が速度 v で無限遠方から点質量 M の重力場に侵入するとき，次の等式（５）が成立する．

次の等式（５）の導出については**補足 1**を参照．

$$(5) \quad U^2 = 2GM/R$$

等式（５）を用いて，等式（４）は次のように書き換えられる．

$$(6) \quad C'^2 = C^2 - 2GM/R$$

$$C'^2 = 0 \text{ のとき, } C^2 - 2GM/R = 0$$

$R_s (= 2GM/C^2)$: シュバルトシルト半径

まず，図 1 ように点質量 M からの距離 R の点を直交して光は伝播するとする．

その後，図1のように点質量 M からの距離 R' の点に光は到達しているとする．

$$\delta = \theta - \omega > 0$$

光は点質量 M の周りを角度 θ だけ回転している．

光はその伝播方向を角度 ω だけ回転している．

光の伝播方向の変化の加速度 $C'(d\omega/dt')$ は重力加速度 $dU^2 \cos\delta/dR$ に等しいとする．

そうすると次の等式（７）が成立する．

$$(7) \quad C'(d\omega/dt') = (dU^2/dR) \cos\delta \\ = C'(d\omega/d\theta)(d\theta/dt')$$

図 2 のように次の等式が成立する．

$$d\theta/dt' = C' \cos\delta/R'$$

上記等式を用いて等式（６）は

次のように書き換えられる．

$$d\omega/dt' = (d\omega/d\theta)(C' \cos\delta/R') = 2GM \cos\delta / C'R'^2$$

$$(8) \quad d\omega/d\theta = 2GM/C'^2 R'$$

等式（６）を用いて等式（８）は次の等式（９）のように書き換えられる．

$$d\omega/d\theta = (2GM/C^2 R') / (1 - 2GM/C^2 R')$$

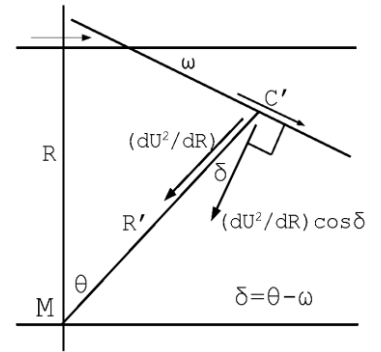


Fig.1

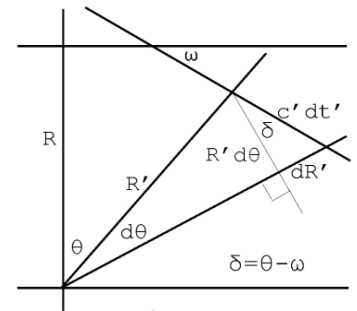


Fig.2

$$R_s = 2GM/C^2$$

$$(9) \quad d\omega/d\theta = (R_s/R')/(1 - R_s/R')$$

$$R' = R/\cos\delta \quad 2R_s < R$$

上記等式の導出については補足 2 を参照

シュバルトシルト解とコペルニクスの相対性理論

ここでは点質量 M を中心に有する球対称な重力場における局所空間(局所慣性系)におけるシュバルトシルト解が検討される。

次のように物理量が表記される。

R : 光が径軸に直交するときの点質量 M からの距離

R' : 点質量 M からの光の距離

C : 時間軸の係数そして静止系における光速

C' : 局所空間(局所慣性系)における光速

θ : 点質量 M の周りの光の回転角

ω : 光の回転角 θ のときの光の伝播方向の回転角

d : 微小変化 即ち 微分

G : 重力定数

$R_s(= 2GM/C^2)$: シュバルトシルト半径

アインシュタインの重力場方程式のシュバルトシルト解は次のように表記される。

$$-dS^2 = C^2(1 - R_s/R')dt'^2 - dR'^2/(1 - R_s/R') - R'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)$$

上記シュバルトシルト解は次の等式(13)のように書き換えられる。

$$C'^2 = C^2(1 - R_s/R') \quad d\Phi = 0$$

$$1/(1 - R_s/R') = 1 + (R_s/R')/(1 - R_s/R')$$

$$(10) \quad -dS^2 + (R_s/R')dR'^2/(1 - R_s/R') = C'^2dt'^2 - dR'^2 - R'^2d\theta^2$$

等式(13)の右辺は図2に示されるように

0である。

前節の次の等式(9)を用いて

$$(9) \quad d\omega/d\theta = (R_s/R')/(1 - R_s/R')$$

上記等式(10)は次の等式(11)のように

書き換えられる。

$$(11) \quad -dS^2 + (d\omega/d\theta)dR'^2 = C'^2dt'^2 - dR'^2 - R'^2d\theta^2 = 0$$

物理量 $(d\omega/d\theta)dR'^2$ がシュバルトシルト解の世界距離 dS^2 における径軸 R' の歪に相当することを上記等式(11)は示している。

等式(11)の右辺は径軸 R' の非線形歪を含んでいないから、非線形量 $(d\omega/d\theta)dR'^2$ が世界距離 dS^2 における径軸 R' の歪を打ち消していることは明らかである。

では何故、このようなことが生じたのかについて以下に検討する。

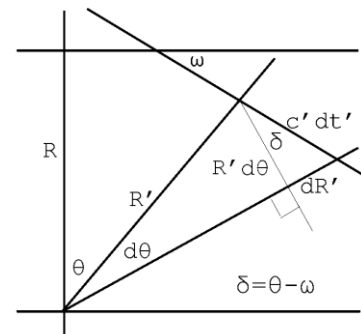


Fig. 2

$d\omega/d\theta$ は光が距離 $C'dt'$ を伝播するときの光の微小回転角 $d\theta$ と光の伝播方向の微小回転角 $d\omega$ の比である。

局所空間（局所慣性系）において径軸方向の加速度 $dU^2/dR' (= -2GM/R'^2)$ のために光は真っ直ぐ伝播できないで伝播方向が径軸 R' 方向に加速される。

上記の如く、光は微小回転角 $d\theta$ だけ回転する間に光の伝播方向は微小回転角 $d\omega$ だけ回転する。

シュバルトシルト解においては重力場における光の曲がり $(d\omega/d\theta)dR'^2$ を補償するように径軸 R' が歪んでいる。

局所空間（局所慣性系）を光がその速度 C' と伝播方向を変えながら伝播すると想定した場合には局所空間（局所慣性系）の径軸 R' は歪ませる必要がない。しかし、局所空間（局所慣性系）を光が光速 C で直進すると想定した場合（シュバルトシルト解）には局所空間（局所慣性系）の径軸 R' は歪ませざるを得ない。

それ故、シュバルトシルト解においては径軸 R' の歪のために光は曲がって伝播するように見える。

ただ、何れが真であるかは確かめようがない。

しかし、局所空間（局所慣性系）において光はその光速 C' と伝播方向を変えながら伝播すると想定すると径軸 R' は歪ませる必要がない。そのためシュバルトシルト解のように光が光速 C で径軸 R' の歪に沿って伝播するとする場合に比較して光の伝播や物体の運動を視覚的に判りやすく表記できる。

これはコペルニクス的な転回と言える。

シュバルトシルト解では重力場のエネルギーは径軸 R' の歪に基づいている。

径軸 R' が歪んでいないとき重力場のエネルギー（補足6を参照）は加速度空間に含まれると考えられる。

径軸 R' の歪のエネルギーと加速度空間のエネルギーは等しいと考えられる。

径軸 R' の歪の伝播（重力波）は加速度の変化の伝播（加速度波）に相当する。

ブラックホール

$R = \gamma R_s$ ($1 < \gamma < 2$)により決定されるブラックホール BH_M が検討される。
次の等式の導出には補足 5 を参照。

$$R' = R \cos \delta$$

上記等式を用いて、等式 (9) は次のように書き換えられる。

$$d\omega/d\theta = (R_s / R \cos \delta) / (1 - R_s / R \cos \delta)$$

$R = \gamma R_s$ ($1 < \gamma < 2$)のとき上記等式は次のように書き換えられる。

$$(12) \quad d\omega/d\theta = 1/(\gamma \cos \delta - 1) > 1$$

上記等式 (10) は光の軌跡が螺旋状であることを示している。言い換えれば、シュバルツシルト半径 R_s の 2 倍以内の重力場に侵入した光はその重力場を脱出できないということである。

それ故、質量 M の質量半径 R_M (補足 7 を参照) がシュバルツシルト半径 R_s よりも大きくその 2 倍よりも小さいとき、質量 M はブラックホール BH_M である。

$$(13) \quad R_s < R_M < 2R_s$$

その質量半径 R_M がシュバルツシルト半径 R_s よりも小さい天体物質 M は存在しない。

何故ならば、質量半径 R_M がシュバルツシルト半径 R_s よりも小さいとき、いかなる物理量 (時空間, 光や物質, 電荷等) も存在しえない空間? が発生することになり、そのような事態は物理的に不可能であるからである。

それ故、質量半径 R_M がシュバルツシルト半径 R_s よりも小さくなるとうるとき、そのブラックホール BH_M は爆発し、その質量 M は四散し、そのブラックホール BH_M は消滅すると考えられる。

ブラックホール BH_M の見かけ上の M_B は次のように算出される。

$$M / (1 - \beta) = M_B$$

$$\beta = U^2 / C^2 \quad U^2 = 2GM / R_M \quad R_s = 2GM / C^2$$

$$\beta = U^2 / C^2 = 2GM / C^2 R_M = R_s / R_M$$

$$(14) \quad M / (1 - R_s / R_M) = M_B$$

上記等式 (14) から明らかなように、質量半径 R_M がシュバルツシルト半径 R_s に接近するにつれて、ブラックホール BH_M の見かけ上の質量 M_B は無限に増大することになる。

ブラックホール BH_M の見かけ上の質量 M_B は超巨大ブラックホール BH_{SM} の存在を可能にすると考えられる。そのような超巨大ブラックホール BH_{SM} はあらゆる銀河の中心に存在すると考えられている。しかし、上記したように超巨大ブラックホール BH_{SM} は爆発して消滅する運命にあるから、そのような超巨大ブラックホール BH_{SM} の存在はその銀河の最後の姿とも言える。

補足 1

物体 m ($\ll M$) が速度 v で無限遠方から点質量 M の重力場に侵入するとき、次の等式が成立する。物体 m は局所慣性系(重力場)に在るとする。

R : 物体 m の点質量 M からの距離

$g (= GM/R^2)$: 物体 m に作用する重力加速度

v : 物体 m の無限遠方での速度

V' : 物体 m の局所慣性系(重力場)における速度

$F (= mg)$: 局所慣性系(重力場)において物体 m に作用する力

$$(iCdt')^2 + (Udt')^2 + (vdt')^2 = (dS')^2 = (iCdt')^2 + (V'dt')^2$$

$$(Udt')^2 + (vdt')^2 = (V'dt')^2$$

$$V'^2 = v^2 + U^2$$

$$mV'^2/2 = mv^2/2 + mU^2/2$$

$$d(mv^2/2)/dR = 0$$

エネルギー E を R で微分するとその質量 M に作用する力 F が得られる。言い換えると、 $dE = FdR$ である。 $E = mV'^2/2$ であるから次の等式が成立する。

$$d(mV'^2/2)/dR = d(mU^2/2)/dR = -F = -mg = -mGM/R^2$$

$$dU^2/dR = -2GM/R^2$$

$$(5) \quad U^2 = 2GM/R$$

補足 2

図 2 を参照して、 $\theta - \omega > 0$ のとき、 R' は次のようにして得られる。

$$\delta = \theta - \omega$$

$$dR' = C' dt' \sin \delta$$

$$d\theta/dt' = C' \cos \delta / R'$$

$$dR'/dt' = (dR'/d\theta)(d\theta/dt') = C' \sin \delta$$

$$(dR'/d\theta)(C' \cos \delta / R') = C' \sin \delta$$

$$d(\log R')/d\theta = \sin \delta / \cos \delta = -d(\log(\cos \delta))/d\delta$$

$$\log R' = -\log(\cos \delta) + \log A$$

A : 積分定数

$$R' \cos \delta = R' \cos(\theta - \omega) = A$$

光が径軸 R と直交する ($\theta = \omega = 0$) とき、 $R' = R$

それ故、 $R = A$

$$R' = R / \cos \delta$$

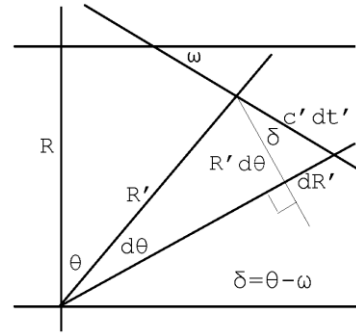


Fig. 2

補足 3

μ 粒子の寿命と走行距離

非常に高いエネルギーをもつ一次宇宙線は大気上空の原子と衝突して高エネルギー（速さ v ）のミュー粒子 μ をつくる。このミュー粒子 μ は6km位の高空から地上に達することが知られている。

地上で測定すると、静止状態のミュー粒子 μ は平均寿命 $\tau(= 2.15 \times 10^{-6}\text{sec})$ で電子(e^-)と中性微子（ニュートリーノ、 ν_μ ）に崩壊する。

いかなる粒子も光速 $C = 3.0 \times 10^8\text{m/s}$ を越えられないので、このミュー粒子 μ が光速 C で走行したとしても、その走行距離は高々 $\tau \times C = 2.15 \times 10^{-6}\text{sec} \times 3.0 \times 10^8\text{m/s} = 645\text{m}$ であり、高空から6kmの距離を走行して地上に達することはできない。

そこで以下において、ミュー粒子 μ が地上に到達可能であることを相対論的に検証する。

ミュー粒子 μ の平均寿命 $\tau(= 2.15 \times 10^{-6}\text{sec})$ は静止系でのことであるから、ミュー粒子 μ を静止系とする。その静止系では時間 $dt = \tau$ が経過した後、そのミュー粒子 μ は崩壊する。その世界距離 dS^2 は次のとおりである。

$$dS^2 = C^2 dt^2 = C^2 \tau^2$$

観測する地上を慣性系とする。その慣性系では、時間 dt' の間に μ 粒子は速度 v で6kmだけ走行した後、そのミュー粒子 μ は崩壊する。その世界距離 dS'^2 は次のとおりである。

$$dS'^2 = C^2 dt'^2 - (6 \times 10^3)^2$$

両方の世界距離は等しいから、次の等式が成立する。

$$C^2 (2.15 \times 10^{-6})^2 = C^2 dt'^2 - (6 \times 10^3)^2$$

$$C^2 = (3.0 \times 10^8)^2$$

$$C^2 (2.15 \times 10^{-6})^2 + (6 \times 10^3)^2 = C^2 dt'^2$$

$$dt'^2 = (2.15 \times 10^{-6})^2 + (6 \times 10^3)^2 / (3.0 \times 10^8)^2 \cong 4.6891 \times 10^{-10}$$

$$dt' \cong 2.165 \times 10^{-5}\text{s}$$

$$v = 6 \times 10^3 / dt' \cong 2.771 \times 10^8\text{m/s} < C = 3.0 \times 10^8$$

ミュー粒子 μ は光速 $C = 3.0 \times 10^8$ に近い速度 $\cong 2.771 \times 10^8\text{m/s}$ で6km位の高空から地上に達して崩壊したことになる。

これは決して不可能ではない。

そして静止系に較べて慣性系では時間が速く経過することを示している。

補足 4

点質量 M のエネルギー

点質量 M の重力場の加速度は U^2 を dR で微分したもの (dU^2/dR) であり, 次のとおりである.

$$U^2 = 2GM/R$$

$$dU^2/dR = (d(2GM/R)/dR = -2GM/R^2$$

点質量 M から距離 R にある点質量 dM には上記加速度が作用する.

点質量 dM に作用する力 F は次のとおりである.

$$F = 2GMdM/R^2$$

力 F が距離 dR にわたって質量 dM に作用するときのエネルギー dE は次のとおりである.

$$dE = FdR$$

点質量 dM をシュバルツシルト半径 R_s から無限遠方まで運ぶためには次のエネルギー E_{dM} が必要である.

$$R_s = 2GM/C^2$$

$$E_{dM} = \int dE = \int_{R_s}^{\infty} FdR = \int_{R_s}^{\infty} (2GMdM/R^2)dR = 2GMdM/R_s = C^2dM$$

以上のとおり, エネルギー E_{dM} は点質量 dM をシュバルツシルト半径 R_s から無限遠方まで運ぶために必要なエネルギーである.

そうすると, 次の等式が成立する.

E_M : 点質量 M をシュバルツシルト半径 R_s から無限遠方に運ぶために必要なエネルギー

$$E_M = \int E_{dM} = \int_0^M C^2dM = MC^2$$

したがって, $E_M = MC^2$ は点質量 M のエネルギーそのものである.

補足 5

$R' = R \cos \delta$ は $R = \gamma R_s$ ($1 < \gamma < 2$) の場合に成立する.

$$-\delta = \theta - \omega$$

$$dR'/R' d\theta = -\tan \delta = -\sin \delta / \cos \delta$$

$$(dR'/d\theta)(\cos \delta / R') = -\sin \delta$$

$$d(\log R')/d\theta = -\sin \delta / \cos \delta = d(\log(\cos \delta))/d\delta$$

$$\log R' = \log(\cos \delta) + \log A$$

$\log A$: 積分定数

$$R' = A \cos \delta, \quad \theta = \omega = 0, \quad R' = R = A$$

$$R' = R \cos \delta = \gamma R_s (\cos \delta)$$

上記等式を用いて等式 (9) は次のように書き換えられる.

$$(9) \quad d\omega/d\theta = (R_s/R')/(1 - (R_s/R'))$$

$$d\omega/d\theta = (R_s/R \cos \delta)/(1 - (R_s/R \cos \delta))$$

$$= (1/\gamma \cos \delta)/(1 - 1/\gamma \cos \delta)$$

$$= 1/(\gamma \cos \delta - 1) > 0$$

$$d\delta/d\theta = d\omega/d\theta - 1 = (2 - \gamma \cos \delta)/(\gamma \cos \delta - 1)$$

$$(2 - \gamma \cos \delta) > 0$$

$$= (2 - \gamma \cos \delta)(d\omega/d\theta) > 0$$

$$d\omega/d\theta - 1 > 0$$

$$(13) \quad d\omega/d\theta > 1$$

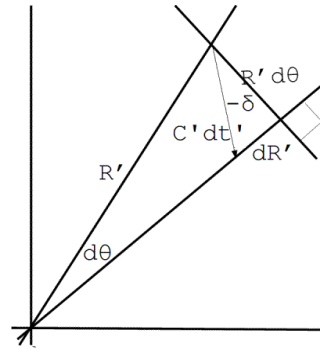


Fig.3

補足 6

太陽 M の周辺を伝播する光の伝播方向は図5に示すように次のように曲げられる.

R : 太陽の質量半径

M : 太陽の質量

ω_p : 太陽 M の周辺を伝播する光が曲げられる角度

$R_s (= 2GM/C^2)$: 太陽 M のシュバルツシルト半径

$$R_s \ll R \quad \omega \ll \theta \quad \delta = \theta - \omega \cong \theta$$

$R' = R/\cos\delta$: この等式の導出については補足2を参照

$$d\omega/d\theta = R_s(\cos\delta/R)/(1 - R_s(\cos\delta/R)) \cong (R_s/R)\cos\theta$$

$$\omega_p = \int d\omega \cong \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R_s/R)\cos\theta d\theta$$

$$= (R_s/R)(\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2))$$

$$\omega_p = 2R_s/R = 4GM/C^2R$$

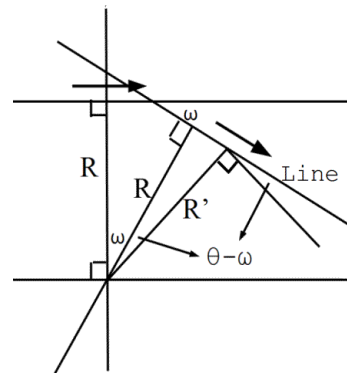


Fig.5

補足7 ブラックホールの質量 M と質量半径 R_M

質量 M の径方向の密度を ρ/r^2 とすると、 R_S が不定になる。

質量 M の径方向の密度を ρ/r^3 とすると、質量半径 R_M はシュバルツシルト半径 R_S よりも小さいことになる。

質量 M の径方向の密度を一定 ρ とすると、質量 M は質量半径 R_M の3乗に比例して増大し、質量 M に比例して増大するシュバルツシルト半径 R_S は質量半径 R_M よりも直ぐに大きくなる。それ故、各銀河に存在すると予想される超巨大ブラックホールは存在し得ないことになる。

質量 M の径方向の密度を ρ/r とすると、質量半径 R_M とシュバルツシルト半径 R_S の関係は次のようになる。

ρ : 質量 M の径方向の密度係数

ρ/r : 質量 M の径方向の密度

R_M : 質量半径

R_S : シュバルツシルト半径

r : 質量 M の中心からの距離

M_S : 質量半径 R_M とシュバルツシルト半径 R_S が等しいときの質量 M

$$M = \int_0^{R_M} 4\pi r^2 (\rho/r) dr = 2\pi\rho R_M^2 \quad R_M = \sqrt{M/2\pi\rho}$$

$$R_S = 2GM/C^2 = 4\pi G\rho R_M^2/C^2$$

$$R_S = R_M \quad R_S = C^2/4\pi G\rho \quad M_S = C^4/8\pi G^2\rho$$

ρ が減少すると、それに反比例して R_S と M_S は増大する。

ρ の減少は超巨大ブラックホールの存在を可能にする

