ゴールドバッハ予想

東森秀朋　2021/10/08

１．あらゆる素数を含む数列の生成

自然数の二乗和の公式は次のとおりである．

$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-2)^2 + (k-1)^2 + k^2 = k(K+1)(2k+1)/6$

自然数の二乗和は整数であるから，$k(K+1)(2k+1)$は数6で割り切れる．

$p_k = 2k+1$が素数であるとき，$(2k+1)$は数6で割り切れない．

そのとき，kまたは$k+1$は，いずれかが偶数であるから，数3の倍数である．

mは自然数　　$k = 3m$　または　$k+1 = 3m$

$p_k = 2k+1 = 6m \pm 1$

２．あらゆる偶数の生成

以下の２個のp_mとp_nは合成数又は素数である．

nは自然数　　$p_m = 6m \pm 1$　　$p_n = 6n \pm 1$　　$m + n = l$

$$\begin{aligned} p_m + p_n = 6m \pm 1 + 6n \pm 1 &= 6(m+n) - 2 = 6l - 2 \\ &= 6(m+n) \qquad = 6l \\ &= 6(m+n) + 2 = 6l + 2 \end{aligned}$$

上記から判るように，10以上（$l \geq 2$）のあらゆる偶数はp_mとp_nの和$(p_m + p_n)$として生成される．

素数定理の“自然数xが素数である確率$(\frac{1}{\log x})$”を用いると，p_mとp_nの両方が素数である組み合わせが存在する確率qは次のとおりである．

$$q = \sum_{m=1}^{l/2} \left(\frac{1}{\log(6m)}\right)\left(\frac{1}{\log(6(l-m))}\right) \cong \frac{l}{2(log l)^2}$$

この確率qはlの増大につれて無限大に発散することが判っている．

p_mやp_nが素数である確率は素数定理の上記確率の３倍であるから，ゴールドバッハ予想は当然に成立するように見える．

素数定理はリーマン予想に基づいて証明されている．

しかし，リーマン予想は未だに証明されていない．

そうすると，リーマン予想が成立しないとき，素数定理が成立しなくなり，ゴールドバッハ予想は成立しない可能性がある．

つまり，ゴールドバッハ予想の成否はリーマン予想の成否に依拠している．