ゴールドバッハ予想

東森秀朋　2022/11/05

概要

あらゆる素数を含む数列が生成される．
その数列の2個の数値の和によりあらゆる偶数が生成される．
上記2個の数値の両方が素数である確率は素数定理により求められる．
そして，その確率の積算は無限大に発散する．
つまり，あらゆる偶数は2個の素数の和で表されることが証明される．
ついでに，素数定理が確率論的に証明される．

１．あらゆる素数を含む数列の生成

自然数の二乗和の公式は次のとおりである．

$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-2)^2 + (k-1)^2 + k^2 = k(K+1)(2k+1)/6$

自然数の二乗和は整数であるから，$k(K+1)(2k+1)$は数6で割り切れる．
$(2k+1)$が素数であるとき，$(2k+1)$は数6で割り切れない．
そのとき，kまたは$k+1$は，いずれかが偶数であるから，数3の倍数である．

mは自然数　　　$k = 3m$ または $k+1 = 3m$

$$p_m = 2k + 1 = 6m \pm 1$$

２．あらゆる偶数の生成

以下の２個のp_mとp_nは合成数又は素数である．

nは自然数　　$p_m = 6m \pm 1$　　$p_n = 6n \pm 1$　　$m + n = l$

$$\begin{aligned} p_m + p_n = 6m \pm 1 + 6n \pm 1 &= 6(m+n) - 2 = 6l - 2 \\ &= 6(m+n) \quad = 6l \\ &= 6(m+n) + 2 = 6l + 2 \end{aligned}$$

上記から判るように，10以上（$l \geq 2$）のあらゆる偶数はp_mとp_nの和$(p_m + p_n)$として生成される．

３．確率論的証明

素数定理の“自然数xが素数である確率$(\frac{1}{\ln x})$”を用いると，p_mとp_nの両方が素数である確率qは次のとおりである．

$$q = \left(\frac{1}{\ln 6m}\right)\left(\frac{1}{\ln 6(l-m)}\right)$$

積算すると次の不等式が成立する.

$$\sum q = \sum_{m=1}^{l}\left(\frac{1}{\ln 6m}\right)\left(\frac{1}{\ln 6(l-m)}\right) > \frac{l}{(\ln l)^2}$$

この右辺の$\frac{l}{(\ln l)^2}$はlの増大につれて無限大に発散する.

そうすると，確率$\sum q$は当然に無限大に発散する.
上記の如く，ゴールドバッハ予想は素数定理に基づいて証明された.
以下に素数定理の確率論的証明を記載する.

４．素数定理の確率論的証明

始めに

　自然数pが素数pであるとき, その素数pは累乗p^nの形で全自然数中に無限に存在する.

ところが, 全自然数中の累乗p^nの存在確率$\frac{1}{\ln p}$は自然数e^m中の累乗p^nの存在確率から求めることができる.

そして，累乗p^nの存在確率$\frac{1}{\ln p}$は素数pの存在確率$\frac{1}{\ln p}$である.

そうすると，あらゆる自然数は存在確率$\frac{1}{\ln p}$で素数pである.

即ち，自然数pは存在確率$\frac{1}{\ln p}$で素数pである.

つまり，存在確率$\frac{1}{\ln p}$は自然数pが素数pである確率$\frac{1}{\ln p}$である.

素数計数関数$\pi(x)$は確率$\frac{1}{\ln p}$の積分により得られる.

存在確率$\frac{1}{\ln p}$の導出

素数pの累乗p^nに対して下記不等式を成立させる自然数mは必ず存在する.
　eは自然対数の底（ネイピア数）である.

$$e^m < p^n < e^{m+1}$$

対数に変換すると，次の不等式が成立する.

$$m < n\ln p < (m+1) \qquad \ln e = 1$$

$$1 < \frac{n\ln p}{m} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

自然数mを無限大にしたとき，次の等式が成立する.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n\ln p}{m}=1 \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}=\frac{1}{\ln p}$$

累乗p^nと累乗e^mは自然数e^m中に以下のように存在する．

$$e^m < p^n < e^{m+1}$$

$$
\begin{array}{r}
{p_l}^1 \\
{p_{l-1}}^1 \ \ {p_{l-1}}^2 \\
{p_{l-2}}^1 \ \ {p_{l-2}}^2 \ \ {p_{l-2}}^3 \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \qquad\qquad\qquad \\
p^1 \ \ p^2 \ \ p^3 \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ p^n \ \ p^{n-1} \ \ p^n \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
{p_3}^1 \ \ {p_3}^2 \ \ {p_3}^3 \ \ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \ \ {p_3}^{j-2} \ \ {p_3}^{j-1} \ \ {p_3}^j \\
{p_2}^1 \ \ {p_2}^2 \ \ {p_2}^3 \ \ {p_2}^4 \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \ {p_2}^{k-3} \ \ {p_2}^{k-2} \ \ {p_2}^{k-1} \ \ {p_2}^k \\
{p_1}^1 \ \ {p_1}^2 \ \ {p_1}^3 \ \ {p_1}^4 \ \ {p_1}^5 \ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \ {p_1}^{i-4} \ \ {p_1}^{i-3} \ \ {p_1}^{i-2} \ \ {p_1}^{i-1} \ \ {p_1}^i \\
e^1 \ \ e^2 \ \ e^3 \ \ e^4 \ \ e^5 \ \ e^6 \ \ \dots\dots \ \dots\dots \ \dots\dots \ \dots\dots \ e^{m-5} \ \ e^{m-4} \ \ e^{m-3} \ \ e^{m-2} \ \ e^{m-1} \ \ e^m
\end{array}
$$

したがって，指数比$\frac{n}{m}$は自然数e^m中の素数pの存在確率である．

そうすると，$\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}$は全自然数$\lim_{m\to\infty} e^m$中の素数$p$の存在確率$\frac{1}{\ln p}$である．

そして，素数pは存在確率$\frac{1}{\ln p}$で全自然数中に存在するから，あらゆる自然数は存在確率$\frac{1}{\ln p}$で素数pである．

つまり，存在確率$\frac{1}{\ln p}$は自然数pが素数である確率$\frac{1}{\ln p}$である．

素数計数関数$\boldsymbol{\pi(x)}$の導出

素数計数関数$\pi(x)$は確率$\frac{1}{\ln p}$の積分により下記の如く得られる．

$$\pi(x)=\int_2^x\left(\frac{1}{\ln p}\right)dp \cong x/\ln x$$

以上の如く素数定理は証明された．

参考文献

1. Erdős, Paul (1949-07-01), "On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem,", Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.A.: National Academy of Sciences) 35 (7): 374-384, doi:10.1073/pnas.35.7.374