ソフィージェルマン素数の無限存在の証明

東森秀朋　2022/11/15

１．始めに

ソフィージェルマン素数pは$2p+1$も素数である．そのような素数は無限に存在すること素数定理を使って証明する．そして，その素数定理も簡単に証明する．

２．あらゆる素数を含む数列の生成

自然数の二乗和の公式は次のとおりである．

$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-2)^2 + (k-1)^2 + k^2 = k(K+1)(2k+1)/6$

自然数の二乗和は整数であるから，$k(K+1)(2k+1)$は数6で割り切れる．

$p_m = 2k+1$が素数であるとき，$(2k+1)$は数6で割り切れない．

そのとき，kまたは$k+1$は，いずれかが偶数であるから，数3の倍数である．

mは自然数　　$k = 3m$ または $k+1 = 3m$

$$p_m = 2k+1 = 6m \pm 1$$

３．ソフィージェルマン素数の無限存在

ソフィージェルマン素数p_mは$p_n = 2p_m + 1$も素数である．

$$p_m = 6m-1 \qquad p_n = 12m-1$$

素数定理の“自然数xが素数である確率$(\frac{1}{\ln x})$”を用いると，p_mとp_nの両方が素数である確率qは次のとおりである．

$$q = \sum_{m=1}^{l}(\frac{1}{\ln(6m-1)})(\frac{1}{\ln(12m-1)}) \geq \frac{l}{(\ln l)^2}$$

右辺はlの増大につれて無限大に発散することが判っている．

それ故，この確率qは無限大に発散する．

したがって，ソフィージェルマン素数p_mは無限に存在する．

４．素数定理の簡単な証明

始めに

自然数pが素数pであるとき, その素数pは累乗p^nの形で全自然数中に無限に存在する．

ところが，全自然数中の累乗p^nの存在確率$\frac{1}{\ln p}$は自然数e^m中の累乗p^nの存在確率から求めることができる．

そして，累乗p^nの存在確率$\frac{1}{\ln p}$は素数pの存在確率$\frac{1}{\ln p}$である．

そうすると，あらゆる自然数は存在確率$\frac{1}{\ln p}$で素数pである．

即ち，自然数pは存在確率$\frac{1}{\ln p}$で素数pである．

つまり，存在確率$\frac{1}{\ln p}$は自然数pが素数pである確率$\frac{1}{\ln p}$である．

素数計数関数$\pi(x)$は確率$\frac{1}{\ln p}$の積分により得られる．

存在確率$\frac{1}{\ln p}$の導出

素数pの累乗p^nに対して下記不等式を成立させる自然数mは必ず存在する．

eは自然対数の底（ネイピア数）である．

$$e^m < p^n < e^{m+1}$$

対数に変換すると，次の不等式が成立する．

$$m < n \ln p < (m+1) \qquad \ln e = 1$$

$$1 < \frac{n \ln p}{m} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

自然数mを無限大にしたとき，次の等式が成立する．

$$\lim_{m \to \infty} \frac{n \ln p}{m} = 1 \qquad \lim_{m \to \infty} \frac{n}{m} = \frac{1}{\ln p}$$

累乗p^nと累乗e^mは自然数e^m中に以下のように存在する．

$$e^m < p^n < e^{m+1}$$

$$p_l{}^1$$

$$p_{l-1}{}^1 \quad p_{l-1}{}^2$$

$$p_{l-2}{}^1 \quad p_{l-2}{}^2 \quad p_{l-2}{}^3$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$p^1 \quad p^2 \quad p^3 \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad p^n \quad p^{n-1} \quad p^n$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$p_3{}^1 \quad p_3{}^2 \quad p_3{}^3 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad p_3{}^{j-2} \quad p_3{}^{j-1} \quad p_3{}^j$$

$$p_2{}^1 \quad p_2{}^2 \quad p_2{}^3 \quad p_2{}^4 \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad p_2{}^{k-3} \quad p_2{}^{k-2} \quad p_2{}^{k-1} \quad p_2{}^k$$

$$p_1{}^1 \quad p_1{}^2 \quad p_1{}^3 \quad p_1{}^4 \quad p_1{}^5 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad p_1{}^{i-4} \quad p_1{}^{i-3} \quad p_1{}^{i-2} \quad p_1{}^{i-1} \quad p_1{}^i$$

$$e^1 \quad e^2 \quad e^3 \quad e^4 \quad e^5 \quad e^6 \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad e^{m-5} \quad e^{m-4} \quad e^{m-3} \quad e^{m-2} \quad e^{m-1} \quad e^m$$

したがって，指数比$\frac{n}{m}$は自然数e^m中の素数pの存在確率である.

そうすると，$\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}$は全自然数$\lim_{m\to\infty} e^m$中の素数$p$の存在確率$\frac{1}{\ln p}$である.

そして，素数pは存在確率$\frac{1}{\ln p}$で全自然数中に存在するから，あらゆる自然数は存在確率$\frac{1}{\ln p}$で素数pである.

つまり，存在確率$\frac{1}{\ln p}$は自然数pが素数である確率$\frac{1}{\ln p}$である.

素数計数関数$\boldsymbol{\pi(x)}$の導出

素数計数関数$\pi(x)$は確率$\frac{1}{\ln p}$の積分により下記の如く得られる.

$$\pi(x) = \int_2^x \left(\frac{1}{\ln p}\right) dp \cong x/\ln x$$

以上の如く素数定理は証明された.

参考文献

1. Erdős, Paul (1949-07-01), "On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem,", Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.A.: National Academy of Sciences) 35 (7): 374-384, doi:10.1073/pnas.35.7.374