素数の割合

東森秀朗　2020.09.26

要約

自然数の二乗和の公式から素数の生成式を導出する．その生成式は２系列の素数を生成する．あらゆる素数はその２系列の何れかに属する．生成式の特性を利用して自然数に占める素数の割合について検討する．

１．始めに

自然数の二乗和の公式から素数の生成式を導出する．その生成式は２系列の素数を生成する．あらゆる素数はその２系列の何れかに属する．生成式の特性を利用して自然数に占める素数の割合について検討する．

２．生成式の導出

自然数の二乗和の公式は次のとおりである．

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-2)^2 + (k-1)^2 + k^2 = k(K+1)(2k+1)/6$$

自然数の二乗和は整数であるから，$k(K+1)(2k+1)$は数6で割り切れる．

$p_k = 2k+1$が素数であるとき，$(2k+1)$は数6で割り切れない．

そのとき，kまたは$k+1$は，いずれかが偶数であるから，数3で割り切れる．

その結果，素数p_kの生成式は次の２系列が存在する．

mは自然数

$k = 3m$　　　　$p_k = 2k+1 = 6m+1$

$k+1 = 3m$　　　$p_k = 2k-2+1 = 6m-1$

２系列を区別して以下の如く表記する．

$p_k = 6m+1 = p_{m+}$

$p_k = 6m-1 = p_{m-}$

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p_{m+} = 6m+1 =$	7	13	19	**25**	31	37	43	49	**55**	61	67	73	79
$p_{m-} = 6m-1 =$	5	11	17	23	29	**35**	41	47	53	59	**65**	71	**77**

$m =$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$p_{m+} = 6m+1 =$	**85**	91	97	103	109	**115**	**121**	127	133	139	**145**	151	157
$p_{m-} = 6m-1 =$	83	89	**95**	101	107	113	**119**	**125**	131	137	**143**	149	**155**

$$m = \ 27 \quad 28 \quad 29 \quad 30 \quad 31 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36 \quad 37 \quad 25 \quad 26$$

$$p_{m+} = 6m + 1 = 163 \ \mathbf{169} \ \mathbf{175} \ 181 \ 187 \ 193 \ 199 \ \mathbf{205} \ 211 \ 217 \ 223 \ 229 \ \mathbf{235} \ldots$$

$$p_{m-} = 6m - 1 = 161 \ 167 \ 173 \ 179 \ \mathbf{185} \ 191 \ 197 \ 203 \ 209 \ \mathbf{215} \ 221 \ 227 \ 233 \ldots$$

以上の如く, いかなる素数p_kも自然数mの順に生成される２系列(p_{m+}とp_{m-})の数列の何れかに属する.

自然数mは無限であるから，２系列の数列も無限に続く.

しかし，太字の非素数（素数の倍数）も生成される.

そこで，２系列の素数列にするために，その太字の非素数（素数の倍数）を２系列の数列から除去する方法について以下に検討する.

３．２系列の数列における非素数の総個数

各系列の数列には最大数$p_{m\pm}$までにm個の数値（素数または非素数）が含まれる．２系列の数列の任意の２個の異なる数値（素数または非素数）の積の総個数について考える.

$$1 \le i \le m \qquad 1 \le j \le m$$

$$\begin{array}{llllllllll} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots\ldots & i & \ldots\ldots\ldots & j & \ldots\ldots\ldots & m \\ 7 & 13 & 19 & \ldots\ldots\ldots & p_{i+} & \ldots\ldots\ldots & p_{j+} & \ldots\ldots\ldots & 6m+1 \\ 5 & 11 & 17 & \ldots\ldots\ldots & p_{i-} & \ldots\ldots\ldots & p_{j-} & \ldots\ldots\ldots & 6m-1 \end{array}$$

$$p_{i+}p_{j+} = p_{l+} \quad l = 6ij + i + j$$

$$p_{i-}p_{j-} = p_{h+} \quad h = 6ij - i - j$$

$$p_{i+}p_{j-} = p_{r-} \quad r = 6ij - i + j$$

$$p_{i-}p_{j+} = p_{s-} \quad s = 6ij + i - j$$

２個の異なる数値の積の最大値$p_{m+}p_{m-}$は次のとおりである.

$$p_{m+}p_{m-} = (6m+1)(6m-1) = 36m^2 - 1 = 6(6m^2) - 1 \cong 36m^2$$

$$\begin{array}{llllllllllll} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots\ldots & i & \ldots\ldots\ldots & j & \ldots\ldots\ldots & m & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 6m^2 \\ 7 & 13 & 19 & \ldots\ldots\ldots & p_{i+} & \ldots\ldots\ldots & p_{j+} & \ldots\ldots\ldots & 6m+1 & \ldots\ldots p_{i+}p_{j+}, & p_{i-}p_{j-} \ldots\ldots & 36m^2 \\ 5 & 11 & 17 & \ldots\ldots\ldots & p_{i-} & \ldots\ldots\ldots & p_{j-} & \ldots\ldots\ldots & 6m-1 & \ldots\ldots p_{i+}p_{j-}, & p_{i-}p_{j+} \ldots\ldots & 36m^2 \end{array}$$

各系列は$6m^2$個の数値の系列である．２系列であるから，倍の$12m^2$個の数値からなる．この$12m^2$個に含まれる非素数の個数について考える．非素数の個数が判れば素数の個数が判るからである．この$12m^2$個には含まれる非素数の数値は２系列を形成する$2m$個の数値（素数または非素数）の内の２個の数値の積である.

その２個の数値の選び方は次の３とおりである.

１．同一系列のm個の数値から２個の異なる数値を選択する場合.

２．各系列から１個の数値を選択する場合.

３．１個の数値p_iのiは$1 \le i < m$であり，他の数値p_jのjは$m < j < 2m$である場合.

１．の場合について検討する.

m個の数値から２個の数値を選択する仕方は次のとおりである.

$$m!/2!\,(m-2)! = m(m-1)\,/2$$

２系列であるから，$m(m-1) \cong m^2$とおりである.

２．の場合について検討する.

m個の数値の各々に対してm個の数値を選択する仕方はm^2とおりである.

３．の場合について検討する.

１個の数値p_iのiは$1 \le i < m$であり，他の数値p_jのjは$m < j < 2m$である場合である．以下のように４系列がある.

$$p_{i+}p_{j+} = p_{l+} \quad l = 6ij + i + j$$
$$p_{i-}p_{j-} = p_{h+} \quad h = 6ij - i - j$$
$$p_{i+}p_{j-} = p_{r-} \quad r = 6ij - i + j$$
$$p_{i-}p_{j+} = p_{s-} \quad s = 6ij + i - j$$

以下では１系列の非素数の個数を計算する．他の３系列も同じであるから，非素数の総個数は１系列の非素数の個数の４倍である.

$$0 \le \alpha \le 1$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \ldots\ldots\ldots (m-n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad m \quad \ldots\ldots\ldots (1+\alpha)m \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2m$$

$$(m-n)(1+\alpha)m \le m^2$$

$$(m-n) \le m/(1+\alpha)$$

両辺を$md\alpha$で積分すると以下の如くなる.

$$\int_0^1 (m-n)\,md\alpha \le \int_0^1 (m/(1+\alpha))\,md\alpha$$

$$\int_0^1 (m/(1+\alpha))\,md\alpha = m^2 \ln(1+\alpha)\,|_0^1 = m^2 \ln 2$$

$$\int_0^1 (m-n)\,md\alpha \le m^2 \ln 2$$

$$\ln 2 = \ 0.69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321 \ldots$$

$$\int_0^1 (m-n)\,md\alpha \le m^2 \ln 2$$

他の３系列についても同じであるから,非素数の個数は１系列の４倍である.

したがって，３．の場合の非素数の個数$= 4m^2 \ln 2 \cong 2.77256m^2$

１．から３．の場合の非素数の総個数$= 2m^2 + 4m^2 \ln 2 \cong 4.77256m^2$

素数の総個数$\cong 12m^2 - 4.77256m^2 = 7.22744m^2$

したがって，素数の割合$\cong 7.22744m^2/36m^2 = 0.20076$

５．結論

双子素数の生成は素数が２系列で生成されることに起因する.
自然数に占める素数の割合は0.20076である.
この割合は素数の個数関数π(x) の結果（$x = 10^{22}$でπ(x)/x $\cong$ 0.201467）と近似している.
素数の個数関数π(x) は予想にすぎないが，ここでの自然数に占める素数の割合0.20076は予測である.
素数が自然数に占める割合を関数で予想はできても予測はできないと考える.
証明はできないが.
予想は現象の分析に基づいて導き出されるが，予測は論理則に基づいて導き出される.