素数計数関数$\boldsymbol{\pi(e^m)}$の級数表現

東森秀朋　2025/01/21

概要

自然数2から自然数e^mまでの素数計数関数$\pi(e^m)$は下記級数で表わされる．
下記級数の求め方が詳述される．

$$\pi(e^m) = \frac{e^m}{m}\left(1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{n!}{m^n}\right) = \int_2^{e^m} \frac{1}{\ln p}\,dp$$

上記$\pi(e^m) = \int_2^{e^m} \frac{1}{\ln p}\,dp$は“自然数$p$が素数である確率は$\frac{1}{\ln p}$である”ことを証明している．

また，上記級数は次のように素数定理を証明している．

$$\lim_{m\to\infty} \pi(e^m) = \frac{e^m}{m} = \frac{x}{\ln x} \qquad e^m = x$$

そして，mは素数1個に相当することを示している．

上記級数は下記不等式で定まる第n項まで有効である．

$$n \le \frac{m}{\ln m} - 1$$

$e^m = 10^2$，10^3，10^{10}，10^{20}，10^{28}のとき上記第n項まで積算した素数計数値は Wikipedia 掲載の素数計数値と上位半分桁において完全に一致することを例示する．

また，上記確率$\frac{1}{\ln p}$を用いることにより，双子素数の無限存在，ソフィージェルマン素数の無限存在やゴールドバッハ予想は簡単に証明される．

１．始めに

自然数2から自然数e^mまでの素数計数関数$\pi(e^m)$は下記級数で表わされる．
下記級数の求め方が詳述される．

$$\pi(e^m) = \frac{e^m}{m}\left(1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{n!}{m^n}\right) = \int_2^{e^m} \frac{1}{\ln p}\,dp$$

上記$\pi(e^m) = \int_2^{e^m} \frac{1}{\ln p}\,dp$は“自然数$p$が素数である確率は$\frac{1}{\ln p}$である”ことを証明している．

また，上記級数は次のように素数定理を証明している．

$$\lim_{m\to\infty}\pi(e^m)=\frac{e^m}{m}=\frac{x}{\ln x}\qquad e^m=x$$

そして，mは素数1個に相当することを示している．

上記級数は下記不等式で定まる第n項まで有効である．

$$n\le\frac{m}{\ln m}-1$$

$e^m=10^2$，10^3，10^{10}，10^{20}，10^{28}のとき上記第n項まで積算した素数計数値はWikipedia 掲載の素数計数値と上位半分桁において完全に一致する．

また，上記確率$\frac{1}{\ln p}$を用いることにより，双子素数の無限存在，ソフィージェルマン素数の無限存在やゴールドバッハ予想は簡単に証明される．

２．自然数2から自然数$x=e^m$までの素数計数値の求め方

自然数2以上の自然数pについて次の不等式を成立させる自然数の指数mとnは常に存在する．　eは自然対数 (ネーピア数)

$$e^m<p^n<e^{m+1}$$

対数に変換すると、次の不等式が成立する．

$$m<n\ln p<(m+1)\qquad \ln e=1$$

$$1<\frac{n\ln p}{m}<(1+\frac{1}{m})$$

指数mが無限大のとき、次の等式が成立する．

$$\lim_{m\to\infty}\frac{n\ln p}{m}=1\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}=\frac{1}{\ln p}$$

それ故，指数mが十分に大きいとき、次の等式が成立する．

$$\frac{n\ln p}{m}=1\qquad \frac{n}{m}=\frac{1}{\ln p}\qquad (2.1)$$

自然数の累乗でない自然数は基本自然数とする．

その基本自然数の累乗である自然数は累乗自然数とする．

例えば，以下の自然数は基本自然数である．

2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30, 31 …

以下の自然数は，基本自然数の累乗であるから，累乗自然数である．

4　8, 9　16　25　27　32　36 …

自然数2から自然数xまでにl個の基本自然数$p_{v1}, p_{v2}, p_{v3} \dots p_{vi} \dots p_{vl}$が存在するとする．

自然数2から自然数xまでにh個の累乗自然数$p_{u1}, p_{u2}, p_{u3} \dots p_{uj} \dots p_{uh}$が存在するとする．

あらゆる自然数は基本自然数又はその累乗自然数である．

したがって，次の等式が成立する．

$$l + h = x = e^m$$

自然数mが十分に大きいとき、自然数2から自然数xまでに基本自然数p_{vi}の累乗自然数はn_{vi}個存在する．

したがって，指数mが十分に大きいとき，次の等式が成立する．

$$\sum_{i=1}^{l} n_{vi} = e^m \qquad x = e^m$$

$$\frac{n_{vi}}{m} = \frac{1}{\ln p_{vi}} \qquad \sum_{i=1}^{l} \frac{n_{vi}}{m} = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\ln p_{vi}} = \frac{e^m}{m}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\ln p_{vi}} + \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{\ln p_{ui}} = \sum_{p=2}^{e^m} \frac{1}{\ln p} = \int_2^{e^m} \frac{1}{\ln p} dp$$

$$\frac{e^m}{m} = \int_2^{e^m} \frac{1}{\ln p} dp - \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{\ln p_{ui}} \qquad (2.1)$$

３．素数計数関数$\boldsymbol{\pi(x)}$の級数表現

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{n_{vi}}{m} = \frac{e^m}{m} = \frac{x}{\ln x} = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\ln p_{vi}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}$$

$$\int_2^{e^m} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\ln x}\right) dx = \int_2^{e^m} \frac{1}{\ln x} dx - \int_2^{e^m} \frac{1}{(\ln x)^2} dx$$

$$\int_2^{e^m} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\ln x}\right) dx = \frac{e^m}{m} = \frac{x}{\ln x} = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\ln p_{vi}}$$

$$\frac{e^m}{m} = \int_2^{e^m} \frac{1}{\ln x} dx - \int_2^{e^m} \frac{1}{(\ln x)^2} dx \qquad \int_2^{e^m} \frac{1}{(\ln x)^2} dx = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{\ln p_{ui}}$$

$$\pi_1 = \int_2^{e^m} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\ln x}\right) dx = \frac{e^m}{m} = \int_2^{e^m} \frac{1}{\ln x} dx - \int_2^{e^m} \frac{1}{(\ln x)^2} dx$$

$$\pi_2 = \int_2^{e^m} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(\ln x)^2}\right) dx = \frac{e^m}{m^2} = \int_2^{e^m} \frac{1}{(\ln x)^2} dx - \int_2^{e^m} \frac{2}{(\ln x)^3} dx$$

$$\pi_3 = \int_2^{e^m} \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{(\ln x)^3}\right) dx = \frac{2e^m}{m^3} = \int_2^{e^m} \frac{2}{(\ln x)^3} dx - \int_2^{e^m} \frac{3\times 2}{(\ln x)^4} dx$$

$$\pi_4 = \int_2^{e^m} \frac{d}{dx}\left(\frac{3\times 2x}{(\ln x)^4}\right) dx = \frac{3\times 2e^m}{m^4} = \int_2^{e^m} \frac{3\times 2}{(\ln x)^4} dx - \int_2^{e^m} \frac{4\times 3\times 2}{(\ln x)^5} dx$$

$$\pi_5 = \int_2^{e^m} \frac{d}{dx}\left(\frac{4\times 3\times 2x}{(\ln x)^5}\right) dx = \frac{4\times 3\times 2e^m}{m^5} = \int_2^{e^m} \frac{4\times 3\times 2}{(\ln x)^5} dx - \int_2^{e^m} \frac{5\times 4\times 3\times 2}{(\ln x)^6} dx$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\pi_n = \int_2^{e^m} \frac{d}{dx}\left(\frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}}\right) dx = \frac{n!e^m}{m^{n+1}} = \int_2^{e^m} \frac{n!}{(\ln x)^{n+1}} dx - \int_2^{e^m} \frac{(n+1)!}{(\ln x)^{n+2}} dx$$

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{m} \pi_n = \frac{e^m}{m} + \sum_{n=1}^{m} \frac{n!e^m}{m^{n+1}} = \frac{e^m}{m}\left(1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{n!}{m^n}\right) = \int_2^{e^m} \frac{1}{\ln x} dx \qquad (3.1)$$

上記$\pi(x)$の第n項の$\frac{e^m}{m^{n+1}}$は1より大きいか等しくなければならない.

何故ならば，存在しない素数を計数するからである.

$$\frac{e^m}{m^{n+1}} \geq 1$$

$$\ln \frac{e^m}{m^{n+1}} \geq \ln 1 = 0$$

$$m \geq (n+1) \ln m$$

$$n \leq \frac{m}{\ln m} - 1$$

以上のとおり，$\pi(x)$は上記第n項まで計算する必要がある.

上記第n項を超えて計算することは存在しない素数を計数することになる.

４．級数表現$\boldsymbol{\pi(x)}$による素数計数例

上記級数(3.1)の第n項まで関数電卓により計算された素数計数値は，以下の５例に示すように，ウィキペディア掲載の素数計数値と上位半分析において一致している.

[1] $x = 10^2$ $n \leq \frac{m}{\ln m} - 1 = \frac{\ln 10^2}{\ln \ln 10^2} - 1 = 2$

Wikipedia $\pi(10^2) = \mathbf{25}$

$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{2} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \mathbf{25}$

$\frac{10^2}{\ln 10^2} = 21.$

$\frac{10^2}{(\ln 10^2)^2} = 4.$

$\frac{2\times 10^2}{(\ln 10^2)^3} = 0.$

[2] $x = 10^3$ $n \leq \frac{m}{\ln m} - 1 = \frac{\ln 10^3}{\ln \ln 10^3} - 1 = 2$

Wikipedia $\pi(10^3) = \mathbf{168}.$

$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{2} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \mathbf{170}.$

$\frac{10^3}{\ln 10^3} = 144.$

$\frac{10^3}{(\ln 10^3)^2} = 20.$

$\frac{2\times 10^3}{(\ln 10^3)^3} = 6.0$

[3] $x = 10^{10}$ $n \leq \frac{m}{\ln m} - 1 = \frac{\ln 10^{10}}{\ln \ln 10^{10}} - 1 = 6$

Wikipedia $\pi(10^{10}) = \mathbf{455,05}2{,}511.$

$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{6} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \mathbf{455,05}4{,}586.$

$\frac{10^{10}}{\ln 10^{10}} = \mathbf{4}34{,}294{,}481.$

$+\frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2} = \mathbf{45}3{,}155{,}651$

$+\frac{2\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^3} = \mathbf{45}4{,}793{,}911$

$$+\frac{3!\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^4} = \mathbf{455,0}07{,}357$$

$$+\frac{4!\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^5} = \mathbf{455,0}44{,}436.$$

$$+\frac{5!\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^6} = \mathbf{455,052},488.$$

$$+\frac{6!\times 10^{10}}{(\ln 10^{10})^7} = \mathbf{455,05}4{,}586.$$

[**4**] $x = 10^{20}$ $\quad n \le \frac{m}{\ln m} - 1 = \frac{\ln 10^{20}}{\ln\ln 10^{20}} - 1 = 11$

Wikipedia $\quad \pi(x = 10^{20}) = \mathbf{2,220,819,602},560{,}918{,}840.$

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{11} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \mathbf{2,220,819,602},767{,}522{,}778.$$

$$\frac{10^{20}}{\ln 10^{20}} = \mathbf{2},171{,}472{,}409{,}516{,}259{,}138.$$

$$+\frac{10^{20}}{(\ln 10^{20})^2} = \mathbf{2,2}18{,}625{,}333{,}769{,}162{,}620.$$

$$+\frac{2\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^3} = \mathbf{2,220},673{,}159{,}250{,}026{,}420.$$

$$+\frac{3!\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^4} = \mathbf{2,220,8}06{,}563{,}145{,}962{,}423.$$

$$+\frac{4!\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^5} = \mathbf{2,220,81}8{,}150{,}461{,}136{,}303.$$

$$+\frac{5!\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^6} = \mathbf{2,220,819},408{,}537{,}896{,}326.$$

$$+\frac{6!\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^7} = \mathbf{2,220,819},572{,}450{,}634{,}732.$$

$$+\frac{7!\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^8} = \mathbf{2,220,819},597{,}365{,}873{,}964.$$

$$+\frac{8!\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^9} = \mathbf{2,220,819,60}1{,}694{,}094{,}329.$$

$$+\frac{9!\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^{10}} = \mathbf{2,220,819,602,5}39{,}969{,}328.$$

$$+\frac{10!\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^{11}} = \mathbf{2,220,819,602},723{,}648{,}751.$$

$$+\frac{11!\times 10^{20}}{(\ln 10^{20})^{12}} = \mathbf{2,220,819,602},767,522,778.$$

[5] $x = 10^{28}$ $\quad n \le \frac{m}{\ln m} - 1 = \frac{\ln 10^{28}}{\ln\ln 10^{28}} - 1 = 14$

Wikipedia $\pi(10^{28}) = \mathbf{157,589,269,275,97}3,410,412,739,598.$

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{14} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \mathbf{157,589,269,275,97}4,641,574,127,869.$$

$$\frac{10^{28}}{\ln 10^{28}} = \mathbf{15}5,105,172,108,304,224,161,117,471.$$

$$+\frac{10^{28}}{(\ln 10^{28})^2} = \mathbf{157,5}10,933,549,778,891,625,657,787.$$

$$+\frac{2\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^3} = \mathbf{157,58}5,562,758,265,181,697,090,982.$$

$$+\frac{3!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^4} = \mathbf{157,589},035,371,133,153,458,999,903.$$

$$+\frac{4!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^5} = \mathbf{157,589,2}50,819,219,774,367,825,705.$$

$$+\frac{5!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^6} = \mathbf{157,589,26}7,527,776,052,238,275,750.$$

$$+\frac{6!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^7} = \mathbf{157,589,269},082,726,150,534,505,654.$$

$$+\frac{7!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^8} = \mathbf{157,589,269,2}51,552,712,365,748,571.$$

$$+\frac{8!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^9} = \mathbf{157,589,269,27}2,501,410,709,179,129.$$

$$+\frac{9!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^{10}} = \mathbf{157,589,269,275},425,737,024,981,599.$$

$$+\frac{10!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^{11}} = \mathbf{157,589,269,275},879,315,161,494,984.$$

$$+\frac{11!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^{12}} = \mathbf{157,589,269,275,9}56,702,707,916,304.$$

$$+\frac{12!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^{13}} = \mathbf{157,589,269,275,97}1,106,558,364,366.$$

$$+\frac{13!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^{14}} = \mathbf{157,589,269,275,974},010,903,577,965.$$

$$+\frac{14!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^{15}} = \mathbf{157,589,269,275,974},641,574,127,869.$$

$$+\frac{15!\times 10^{28}}{(\ln 10^{28})^{16}} = \mathbf{157,589,269,275,974},788,304,524,149.$$

次の例［**6**］は Wikipedia に掲載されると予想される素数計数値です.
当然ながら，上位半分以上の15桁において一致します.

［**6**］　$x = 10^{30}$　$n \leq \frac{m}{\ln m} - 1 = \frac{\ln 10^{30}}{\ln\ln 10^{30}} - 1 = 15$

Wikipedia　$\pi(10^{30}) = ?$

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \sum_{n=1}^{15} \frac{n!x}{(\ln x)^{n+1}} = \mathbf{14,692,398,897,720,4}46,134,334,926,737.$$

[01] **14,6**86,051,282,343,520,843,059,809,330.
[02] **14,692,1**18,913,397,932,101,015,740,802.
[03] **14,692,38**2,427,266,447,662,903,134,612.
[04] **14,692,397,**686,282,314,501,246,288,902.
[05] **14,692,398,7**90,766,712,874,922,509,064.
[06] **14,692,398,88**6,701,008,787,306,610,972.
[07] **14,692,398,896,**422,547,033,311,768,368.
[08] **14,692,398,897,5**48,416,477,538,823,660.
[09] **14,692,398,897,6**95,104,143,630,210,977.
[10] **14,692,398,897,71**6,339,358,279,129,729.
[11] **14,692,398,897,71**9,720,881,678,617,117.
[12] **14,692,398,897,720,**308,312,459,746,756.
[13] **14,692,398,897,720,4**18,863,570,002,801.
[14] **14,692,398,897,720,44**1,269,047,340,625.
[15] **14,692,398,897,720,44**6,134,334,926,737.
[16] **14,692,398,897,720,447,**261,250,954,215.
[17] **14,692,398,897,720,447,**538,585,221,186.

５．結論

自然数2から自然数e^mまでの上記級数による素数計数値が Wikipedia に掲載の素数計数値と上位半分桁において完全に一致することは“自然数pが素数で

ある確率は$\frac{1}{\ln p}$である”を実証しています.

上記“自然数pが素数である確率は$\frac{1}{\ln p}$である”を用いることにより，双子素数の無限存在，ソフィージェルマン素数の無限存在，ゴールドバッハ予想等々は容易に証明されます.

６．参考文献

1. Erdős, Paul (1949-07-01), “On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem,”, Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.A.: National Academy of Sciences) 35 (7): 374-384, doi:10.1073/pnas.35.7.374