素数の割合

東森秀朋　2020.11.23

要約

　自然数の二乗和の公式から素数の生成式を導出する．その生成式は２系列の素数を生成する．あらゆる素数はその２系列の何れかに属する．生成式の特性を利用して自然数に占める素数の割合について検討する．

１．始めに

　自然数の二乗和の公式から素数の生成式を導出する．その生成式は２系列の素数を生成する．あらゆる素数はその２系列の何れかに属する．生成式の特性を利用して自然数に占める素数の割合について検討する．

２．生成式の導出

　自然数の二乗和の公式は次のとおりである．

$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-2)^2 + (k-1)^2 + k^2 = k(K+1)(2k+1)/6$

　自然数の二乗和は整数であるから，$k(K+1)(2k+1)$は数6で割り切れる．

　$p_k = 2k+1$が素数であるとき，$(2k+1)$は数6で割り切れない．

　そのとき，kまたは$k+1$は，いずれかが偶数であるから，数3で割り切れる．

　その結果，素数p_kの生成式は次の２系列が存在する．

mは自然数

$k = 3m$　　$p_k = 2k+1 = 6m+1$

$k+1 = 3m$　　$p_k = 2k-2+1 = 6m-1$

２系列を区別して以下の如く表記する．

$p_k = 6m+1 = p_{m+}$

$p_k = 6m-1 = p_{m-}$

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p_{m+} = 6m+1 =$	7	13	19	**25**	31	37	43	49	**55**	61	67	73	79
$p_{m-} = 6m-1 =$	5	11	17	23	29	**35**	41	47	53	59	**65**	71	**77**

$m =$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$p_{m+} = 6m+1 =$	**85**	91	97	103	109	**115**	**121**	127	133	139	**145**	151	157
$p_{m-} = 6m-1 =$	83	89	**95**	101	107	113	**119**	**125**	131	137	**143**	149	**155**

$m=$ 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 25 26

$p_{m+}=6m+1=$ 163 **169** **175** 181 187 193 199 **205** 211 217 223 229 **235** …

$p_{m-}=6m-1=$ 161 167 173 179 **185** 191 197 203 209 **215** 221 227 233 …

以上の如く, いかなる素数p_kも自然数mの順に生成される２系列（p_{m+}とp_{m-}）の数列の何れかに属する.

自然数mは無限であるから，２系列の数列も無限に続く.

しかし，太字の非素数（素数の倍数）も生成される.

そこで，２系列の素数列にするために，その太字の非素数（素数の倍数）を２系列の数列から除去する方法について以下に検討する.

３．２系列の数列における非素数の総個数

各系列の数列には最大数$p_{m\pm}$までにm個の数値（素数または非素数）が含まれる．２系列の数列の任意の２個の異なる数値（素数または非素数）の積の総個数について考える.

$$1 \le i \le m \qquad 1 \le j \le m$$

$$\begin{array}{llll}
1 \quad 2 \quad 3 \ldots\ldots\ldots & i \ \ldots\ldots\ldots & j \ \ldots\ldots\ldots & m \\
7 \quad 13 \quad 19 \ldots\ldots\ldots & p_{i+} \ldots\ldots\ldots & p_{j+} \ldots\ldots\ldots & 6m+1 \\
5 \quad 11 \quad 17 \ldots\ldots\ldots & p_{i-} \ldots\ldots\ldots & p_{j-} \ldots\ldots\ldots & 6m-1
\end{array}$$

$$p_{i+}p_{j+}=p_{l+} \quad l=6ij+i+j$$

$$p_{i-}p_{j-}=p_{h+} \quad h=6ij-i-j$$

$$p_{i+}p_{j-}=p_{r-} \quad r=6ij-i+j$$

$$p_{i-}p_{j+}=p_{s-} \quad s=6ij+i-j$$

２個の異なる数値の積の最大値$p_{m+}p_{m-}$は次のとおりである.

$$p_{m+}p_{m-}=(6m+1)(6m-1)=36m^2-1=6(6m^2)-1\cong 36m^2$$

$$\begin{array}{lllll}
1 \quad 2 \quad 3 \ldots\ldots\ldots & i \ \ldots\ldots\ldots & j \ \ldots\ldots\ldots & m \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 6m^2 \\
7 \quad 13 \quad 19 \ldots\ldots\ldots & p_{i+} \ldots\ldots\ldots & p_{j+} \ldots\ldots\ldots & 6m+1 \ldots\ldots p_{i+}p_{j+},\ p_{i-}p_{j-} \ldots\ldots & 36m^2 \\
5 \quad 11 \quad 17 \ldots\ldots\ldots & p_{i-} \ldots\ldots\ldots & p_{j-} \ldots\ldots\ldots & 6m-1 \ldots\ldots p_{i+}p_{j-},\ p_{i-}p_{j+} \ldots\ldots & 36m^2
\end{array}$$

各系列は$6m^2$個の数値の系列である．２系列であるから，倍の$12m^2$個の数値からなる．この$12m^2$個に含まれる非素数の個数について考える．非素数の個数が判れば素数の個数が判るからである．この$12m^2$個には含まれる非素数の数値は２系列を形成する$2m$個の数値（素数または非素数）の内の２個の数値の積である.

その２個の数値の選び方は次の３とおりである.

（１）同一系列のm個の数値から２個の異なる数値を選択する場合.

（２）各系列から１個の数値を選択する場合.

（３）１個の数値p_iのiは$1 \le i < m$であり，他の数値p_jのjは$m < j < 2m$である場合.

（１）の場合について検討する.

m個の数値から２個の数値を選択する仕方は次のとおりである.

$$m!/2!\,(m-2)! = m(m-1)\,/2$$

２系列であるから，$m(m-1) \cong m^2$とおりである.

（２）の場合について検討する.

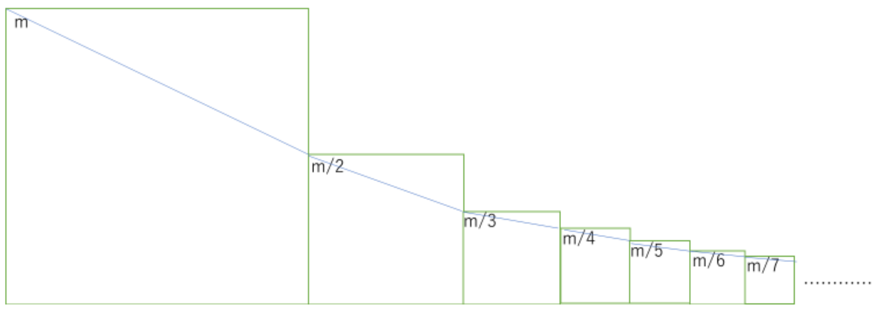
m個の数値の各々に対してm個の数値を選択する仕方はm^2とおりである.

（３）の場合について検討する.

１個の数値p_iのiは$1 \le i \le m$であり，他の数値p_jのjは$nm \le j \le (n+1)m$である場合である．以下のように４系列がある.

$$p_{i+}p_{j+} = p_{l+} \quad l = 6ij + i + j$$
$$p_{i-}p_{j-} = p_{h+} \quad h = 6ij - i - j$$
$$p_{i+}p_{j-} = p_{r-} \quad r = 6ij - i + j$$
$$p_{i-}p_{j+} = p_{s-} \quad s = 6ij + i - j$$

以下では１系列の非素数の個数を計算する．他の３系列も同じであるから，非素数の総個数は１系列の非素数の個数の４倍である.



$$0 \le \alpha \le 1 \qquad\qquad 0 \le n \le m$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \ldots\ldots\ldots (m-\beta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad m \quad \ldots\ldots nm \ldots\ldots (n+\alpha)m \quad \ldots\ldots (n+1)m$$

$$(m-\beta)(n+\alpha)m = m^2$$

$$(m-\beta) = m/(n+\alpha)$$

両辺を$(m/n)d\alpha$で積分すると$nm \le j \le (n+1)m$の非素数の個数が得られる.

$$\int_0^1 (m-\beta)\,(m/n)d\alpha = \int_0^1 (m^2/n(n+\alpha))\,d\alpha$$

$$\int_0^1 (m^2/n(n+\alpha))\,d\alpha \ = m^2(1/n)\ln(n+\alpha)\,|_0^1 = m^2(1/n)\ln((n+1)/n)$$

$$\int_0^1 (m-\beta)\,(m/n)d\alpha = m^2(1/n)\ln(1+1/n)$$

１系列の非素数の個数は$n=1 \sim m$までの総和である．

$$\sum_{n=1}^{m} m^2(1/n)\ln(1+1/n)$$

他の３系列についても同じであるから，（３）の場合の非素数の個数は次のとおりである．

$$1/n(n+1) < (1/n)\ln(1+1/n) < 1/n^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1) < \sum_{n=1}^{m}(1/n)\ln(1+1/n) < \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1) = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$$

$$4m^2 < 4m^2\sum_{n=1}^{m}(1/n)\ln(1+1/n) < 2m^2\pi^2/3$$

（１）から（３）の場合の非素数の個数を総和すると非素数の総個数Tnは次のとおりである．

$$6m^2 < Tn = 2m^2 + 4m^2\sum_{n=1}^{m}(1/n)\ln(1+1/n) < 2m^2(1+\pi^2/3)$$

素数の総個数Tpは，２系列の数値の総個数$12m^2$から上記の非素数の総個数Tnを差し引いたもので，次のとおりである．

$$Tp = 12m^2 - Tn = 10m^2 - 4m^2\sum_{n=1}^{m}(1/n)(1+1/n)$$

素数の自然数$36m^2$に占める割合Rは次のとおりである．

$$6m^2/36m^2 < R = Tp/36m^2 > (10m^2 - 2m^2\pi^2/3)/36m^2$$

$$1/6 < R = (10 - \sum_{n=1}^{m}(1/n)\ln(1+1/n))/36 > (10-2\pi^2/3)/36$$

$$(10-2\pi^2/3)/36 \cong 0.0950$$

したがって，自然数$36m^2$に占める素数の割合Rは，mに依存しないで，$1/6$より小さく，0.0950よりも大きい．

なお，素数の割合Rの近似計算について以下に説明する．

上からの近似計算は以下のとおりである．

$$1 < l < m$$

$$\sum_{n=1}^{m}(1/n)\ln(1+1/n) \cong \sum_{n=1}^{l}(1/n)\ln(1+1/n) + \sum_{n=l+1}^{\infty} 1/n^2$$

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} 1/n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 - \sum_{n=1}^{l} 1/n^2 = \pi^2/6 - \sum_{n=1}^{l} 1/n^2$$

$$\sum_{n=1}^{m}(1/n)\ln(1+1/n) \cong \sum_{n=1}^{l}(1/n)\ln(1+1/n) + \pi^2/6 - \sum_{n=1}^{l} 1/n^2$$

$l=6$では自然数に占める素数の割合Rは$\cong 0.1376$である．そして，$l=10$では$\cong 0.1380$である．lが大きくなればなるほど近似精度は向上する．

下からの近似計算は以下のとおりである．

$$\sum_{n=1}^{m}(1/n)\ln(1+1/n) \cong \ \sum_{n=1}^{l}(1/n)\ln(1+1/n) + \sum_{n=l+1}^{\infty} 1/n(n+1)$$

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} 1/n(n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1) - \sum_{n=1}^{l} 1/n(n+1) = 1 - \sum_{n=1}^{l} 1/n(n+1)$$
$$\sum_{n=1}^{m} (1/n)\ln(1+1/n) \cong \sum_{n=1}^{l} (1/n)\ln(1+1/n) + 1 - \sum_{n=1}^{l} 1/n(n+1)$$
$$\sum_{n=1}^{m} (1/n)\ln(1+1/n) \cong \sum_{n=1}^{l} (1/n)\ln(1+1/n) + 1/(l+1)$$
$l = 6$では自然数に占める素数の割合Rは$\cong 0.1386$である．そして，$l = 10$では$\cong 0.1382$である．lが大きくなればなるほど近似精度は向上する．

以上の上下からの近似計算からして， 自然数に占める素数の割合Rは次の範囲であると予測される．

$$0.1380 < R < 0.1382$$

５．結論

双子素数の生成は素数が２系列で生成されることに起因する．

素数定理で提示される素数の個数関数π(x) によれば，自然数に占める素数の割合は$x = 10^{25}$でπ(x)/x $\cong$ 0.176846 …であり，xの更なる増大に応じてその割合は0に限りなく漸近すると予期されている．

しかし, 上記の如く自然数に占める素数の割合Rは, 0.1382より小さく, 0.1380よりも大きいことが予測される．