

素数の割合

東森秀朋 2021.03.04

要約

自然数の二乗和の公式から素数の生成式を導出する。その生成式は2系列の素数を生成する。あらゆる素数はその2系列の何れかに属する。生成式の特徴を利用して自然数に占める素数の割合について検討する。

1. 始めに

自然数の二乗和の公式から素数の生成式を導出する。その生成式は2系列の素数を生成する。あらゆる素数はその2系列の何れかに属する。生成式の特徴を利用して自然数に占める素数の割合について検討する。

2. 生成式の導出

自然数の二乗和の公式は次のとおりである。

$$\sum_{i=1}^k i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k-2)^2 + (k-1)^2 + k^2 = k(k+1)(2k+1)/6$$

自然数の二乗和は整数であるから、 $k(k+1)(2k+1)$ は数6で割り切れる。

$p_k = 2k+1$ が素数であるとき、 $(2k+1)$ は数6で割り切れない。

そのとき、 k または $k+1$ は、いずれかが偶数であるから、数3で割り切れる。

その結果、素数 p_k の生成式は次の2系列が存在する。

m は自然数

$$k = 3m \quad p_k = 2k + 1 = 6m + 1$$

$$k + 1 = 3m \quad p_k = 2k - 2 + 1 = 6m - 1$$

2系列を区別して以下の如く表記する。

$$p_k = 6m + 1 = p_{m+}$$

$$p_k = 6m - 1 = p_{m-}$$

	$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p_{m+} = 6m + 1 =$		7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79
$p_{m-} = 6m - 1 =$		5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77

	$m =$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$p_{m+} = 6m + 1 =$		85	91	97	103	109	115	121	127	133	139	145	151	157
$p_{m-} = 6m - 1 =$		83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	143	149	155

$$m = 27 \quad 28 \quad 29 \quad 30 \quad 31 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36 \quad 37 \quad 25 \quad 26$$

$$p_{m+} = 6m + 1 = 163 \quad \mathbf{169} \quad \mathbf{175} \quad 181 \quad 187 \quad 193 \quad 199 \quad \mathbf{205} \quad 211 \quad 217 \quad 223 \quad 229 \quad \mathbf{235} \dots$$

$$p_{m-} = 6m - 1 = 161 \quad 167 \quad 173 \quad 179 \quad \mathbf{185} \quad 191 \quad 197 \quad 203 \quad 209 \quad \mathbf{215} \quad 221 \quad 227 \quad 233 \dots$$

以上の如く, いかなる素数 p_k も自然数 m の順に生成される2系列(p_{m+} と p_{m-})の数列の何れかに属する.

自然数 m は無限であるから, 2系列の数列も無限に続く.

しかし, 太字の非素数(素数の倍数)も生成される.

3. 2系列の数列における非素数の総個数

各系列の数列には最大数 $p_{m\pm}$ までに m 個の数値(素数または非素数)が含まれる. 2系列の数列の任意の2個の異なる数値(素数または非素数)の積の総個数について考える.

$$1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq m$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \dots \dots \dots i \quad \dots \dots \dots j \quad \dots \dots \dots m$$

$$7 \quad 13 \quad 19 \dots \dots \dots p_{i+} \quad \dots \dots \dots p_{j+} \quad \dots \dots \dots 6m + 1$$

$$5 \quad 11 \quad 17 \dots \dots \dots p_{i-} \quad \dots \dots \dots p_{j-} \quad \dots \dots \dots 6m - 1$$

$$p_{i+}p_{j+} = p_{l+} \quad l = 6ij + i + j$$

$$p_{i-}p_{j-} = p_{h+} \quad h = 6ij - i - j$$

$$p_{i+}p_{j-} = p_{r-} \quad r = 6ij - i + j$$

$$p_{i-}p_{j+} = p_{s-} \quad s = 6ij + i - j$$

2個の異なる数値の積の最大値 $p_{m+}p_{m-}$ は次のとおりである.

$$p_{m+}p_{m-} = (6m + 1)(6m - 1) = 36m^2 - 1 = 6(6m^2) - 1 \cong 36m^2$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \dots \dots \dots i \quad \dots \dots \dots j \quad \dots \dots \dots m \quad \dots \dots \dots 6m^2$$

$$7 \quad 13 \quad 19 \dots \dots \dots p_{i+} \quad \dots \dots \dots p_{j+} \quad \dots \dots \dots 6m + 1 \dots \dots p_{i+}p_{j+}, p_{i-}p_{j-} \dots \dots 36m^2$$

$$5 \quad 11 \quad 17 \dots \dots \dots p_{i-} \quad \dots \dots \dots p_{j-} \quad \dots \dots \dots 6m - 1 \dots \dots p_{i+}p_{j-}, p_{i-}p_{j+} \dots \dots 36m^2$$

各系列は $6m^2$ 個の数値の系列である. 2系列であるから, 倍の $12m^2$ 個の数値からなる. この $12m^2$ 個に含まれる非素数の個数が判れば素数の個数が判る. この $12m^2$ 個に含まれる非素数の数値は次の(1)-(3)の何れかの積に属する.

- (1) 同一系列の m 個の数値から選択された2個の異なる数値の積
- (2) 各系列から選択された数値の積
- (3) 2つの数値 p_i と p_j の積. そのとき, 数値 p_i の i は $1 \leq i < m$ であり, 数値 p_j の j は $m < j < 2m$ であるように選択される.

(1)の積(非素数)の個数について検討する.

m 個の数値から2個の数値を選択する仕方は次のとおりである. 同じ数値を

選択する m 個の積がある。しかし、 m は、巨大数であるが、 m^2 に較べて無視できる。

$$m!/2!(m-2)! = m(m-1)/2$$

2 系列であるから、 $m(m-1) \cong m^2$ 個の積 (非素数) が生成される。

(2) の積 (非素数) の個数について検討する。

m 個の数値の各々に対して m 個の数値を選択する仕方は m^2 とおりである。

(3) の積 (非素数) の個数について検討する。

1 個の数値 p_i の i は $1 \leq i \leq m$ であり、他の数値 p_j の j は $nm \leq j \leq (n+1)m$ である場合である。以下のように 4 系列がある。

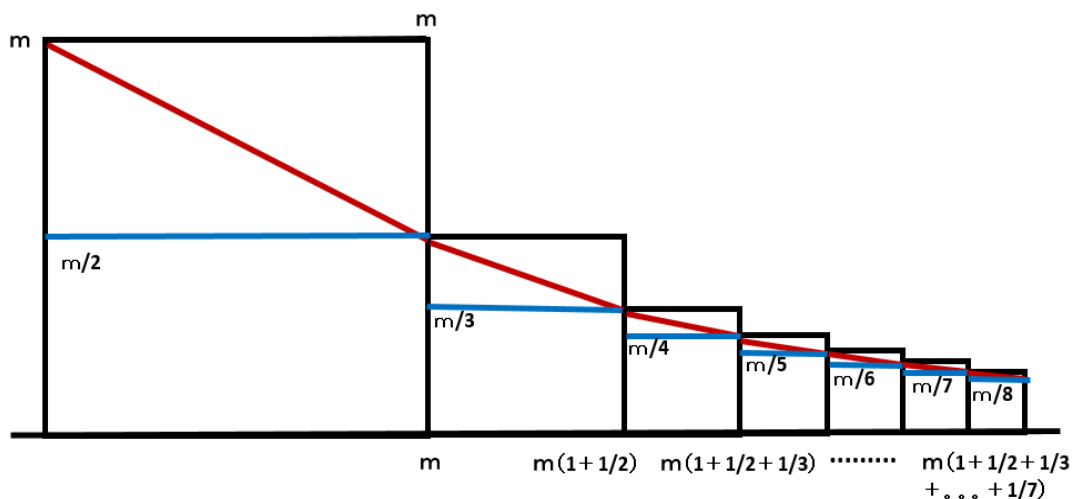
$$p_{i+p_{j+}} = p_{l+} \quad l = 6ij + i + j$$

$$p_{i-p_{j-}} = p_{h+} \quad h = 6ij - i - j$$

$$p_{i+p_{j-}} = p_{r-} \quad r = 6ij - i + j$$

$$p_{i-p_{j+}} = p_{s-} \quad s = 6ij + i - j$$

以下では 1 系列の非素数の個数を計算する。他の 3 系列も同じであるから、非素数の総個数は 1 系列の非素数の個数の 4 倍である。



$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$0 \leq n \leq m$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad (m-\beta) \quad \dots \quad m \quad \dots \quad nm \quad \dots \quad (n+\alpha)m \quad \dots \quad (n+1)m$$

$$(m-\beta)(n+\alpha)m = m^2$$

$$(m-\beta) = m/(n+\alpha)$$

上記等式の右辺の $(m/n)da$ での積分は、次の等式に示すように、数値 p_i ($1 \leq i \leq m$) と数値 p_j ($nm \leq j \leq (n+1)m$) の積 (非素数) の個数を与える。

$$\int_0^1 (m - \beta) (m/n) d\alpha = \int_0^1 (m^2/n(n + \alpha)) d\alpha$$

$$\int_0^1 (m^2/n(n + \alpha)) d\alpha = m^2(1/n) \ln(n + \alpha) \Big|_0^1 = m^2(1/n) \ln((n + 1)/n)$$

$$\int_0^1 (m - \beta) (m/n) d\alpha = m^2(1/n) \ln(1 + 1/n)$$

1 系列の積 (非素数) の個数は次のような $n = 1 \sim m$ までの総和である.

$$\sum_{n=1}^m m^2(1/n) \ln(1 + 1/n)$$

他の 3 系列についても同じであるから, (3) の積 (非素数) の個数は上記総和の 4 倍である.

$$1/n(n + 1) < (1/n) \ln(1 + 1/n) < 1/n^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n + 1) < \sum_{n=1}^m (1/n) \ln(1 + 1/n) < \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n + 1) = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$$

$$4m^2 < 4m^2 \sum_{n=1}^m (1/n) \ln(1 + 1/n) < 2m^2 \pi^2/3$$

(1) から (3) の積 (非素数) の個数を総和すると, $12m^2$ 個に含まれる非素数の総個数 Tn が得られ, 次のとおりである.

$$Tn = 2m^2 + 4m^2 \sum_{n=1}^m (1/n) \ln(1 + 1/n)$$

$$6m^2 < Tn < 2m^2(1 + \pi^2/3)$$

素数の総個数 Tp は, 2 系列の数値の総個数 $12m^2$ から上記の非素数の総個数 Tn を差し引いたもので, 次のとおりである.

$$Tp = 12m^2 - Tn = 10m^2 - 4m^2 \sum_{n=1}^m (1/n)(1 + 1/n)$$

素数の自然数 $36m^2$ に占める割合 R は次のとおりである.

$$R = Tp/36m^2$$

$$6m^2/36m^2 > R = Tp/36m^2 > (10m^2 - 2m^2\pi^2/3)/36m^2 \cong 0.0950$$

$$1/6 > R > 0.0950$$

したがって, 自然数 $36m^2$ に占める素数の割合 R は, m^2 に依存しないで, $1/6$ より小さく, 0.0950 よりも大きい.

なお, 自然数 $36m^2$ に占める素数の割合 R の近似計算について以下に説明する. まず, 上からの近似計算は以下のとおりである.

$$1 < l < m$$

$$\sum_{n=1}^m (1/n) \ln(1 + 1/n) \cong \sum_{n=1}^l (1/n) \ln(1 + 1/n) + \sum_{n=l+1}^{\infty} 1/n^2$$

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} 1/n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 - \sum_{n=1}^l 1/n^2 = \pi^2/6 - \sum_{n=1}^l 1/n^2$$

$$\sum_{n=1}^m (1/n) \ln(1 + 1/n) \cong \sum_{n=1}^l (1/n) \ln(1 + 1/n) + \pi^2/6 - \sum_{n=1}^l 1/n^2$$

$$Tp/m^2 \cong 10 - 4(\sum_{n=1}^l (1/n) \ln(1 + 1/n) + \pi^2/6 - \sum_{n=1}^l 1/n^2)$$

$$R = (Tp/m^2)/36$$

$l = 6$ では自然数に占める素数の割合 R は $\cong 0.1376$ である. そして, $l = 10$ では

≅ 0.1380である。 l が大きくなればなるほど近似精度は向上する。

次に、下からの近似計算は以下のとおりである。

$$1 < l < m$$

$$\sum_{n=1}^m (1/n) \ln(1 + 1/n) \cong \sum_{n=1}^l (1/n) \ln(1 + 1/n) + \sum_{n=l+1}^{\infty} 1/n(n+1)$$

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} 1/n(n+1) = 1 - \sum_{n=1}^l 1/n(n+1) = 1/(l+1)$$

$$\sum_{n=1}^m (1/n) \ln(1 + 1/n) \cong \sum_{n=1}^l (1/n) \ln(1 + 1/n) + 1/(l+1)$$

$$Tp/m^2 \cong 10 - 4(\sum_{n=1}^l (1/n) \ln(1 + 1/n) + 1/(l+1))$$

$$R = (Tp/m^2)/36$$

$l = 6$ では自然数に占める素数の割合 R は ≅ 0.1386である。そして、 $l = 10$ では ≅ 0.1382である。 l が大きくなればなるほど近似精度は向上する。

以上の上下からの近似計算からして、自然数に占める素数の割合 R は次の範囲であると予測される。

$$0.1380 < R < 0.1382$$

5. 結論

双子素数の生成は素数が2系列で生成されることに起因する。

素数定理で提示される素数の個数関数 $\pi(x)$ によれば、自然数に占める素数の割合は $x = 10^{25}$ で $\pi(x)/x \cong 0.176846 \dots$ であり、 x の更なる増大に応じてその割合は0に限りなく漸近すると予期されている。

しかし、上記の如く自然数に占める素数の割合 R は、0.1382より小さく、0.1380よりも大きいことが予測される。