

重力場における光の湾曲を計算するための新しい方法

東森秀朋 2016/5/30

概要

従来、重力場における光の湾曲を計算するためにシュヴァルツシルト解が使用されてきた。しかし、そのシュヴァルツシルト解は径軸の非線形歪を含むために光の湾曲を計算することは非常に困難である。そこで、新方法では、重力場の径軸は歪んでおらず、重力場において光はその速度とその進行方向の両方を変化させながら進行すると仮定します。新方法の妥当性は、シュバルツシルト解の径軸の非線形歪と新方法により導出された光の湾曲とが一致することを示すことにより、証明される。

Abstract

Schwarzschild's solution has been used to calculate the light's winding in the gravitational field. However, for Schwarzschild's solution to include nonlinear distortion of the radial axis, it is very difficult to calculate the light's winding. Therefore, the new method is based on the assumption that the radial axis is not distorted, only the light advances changing the advancing speed and the advancing direction. The validity of the new method is proved by showing that the nonlinear distortion of the radial axis in Schwarzschild's solution corresponds to the light's winding derived by the new method.

1. 序論

新方法では、重力場において、径軸は非線形に歪んでおらず、光はその速度とその進行方向の両方を変化させながら、結果として、湾曲しながら進行すると仮定する。言い換えれば、重力場における径軸の非線形歪は光の湾曲に置き換えられる。重力場における光の速度はその光の存在する位置により決定され、光の進行方向の変化はその存在する位置とその進行方向の両方により決定される。

2. 非線形歪と光の湾曲

アインシュタインの重力場方程式のシュバルツシルト解は式 (1) である。

R' : 重力中心からの距離

M : 球対称重力場を作り出す質量

C : 静止空間における光の速度又は時間軸の係数

C' : 重力場中心から距離 R' の位置における光の速度

θ : 重力場中心の周りの回転角

ω : 重力場中心から距離 R' の位置における光の進行方向の回転角

d : 極めて微小な変化、即ち、微分

$$\alpha = 2GM/C^2$$

$$(1) \quad -dS^2 = C^2(1 - \alpha/R')dt'^2 - dR'^2/(1 - \alpha/R') - R'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)$$

$$C'^2 = C^2(1 - \alpha/R') \quad , \quad d\Phi = 0$$

球対称重力場に光が外部から進入するとき、その光の軌跡は球対称重力場の中心を含む1つの平面上に描かれる。それ故、 $d\Phi = 0$ である。

$C'^2 = C^2(1 - \alpha/R')$ の導出については後で説明する。

$$(2) \quad -dS^2 + (\alpha/R')dR'^2/(1 - \alpha/R') = C'^2 dt'^2 - dR'^2 - R'^2 d\theta^2$$

式(2)の右辺は Fig.1に示されるように 0 に等しい。

光は、式(3)に基づいてその速度 C' を変化させながら、そして、式(4)に基づいて湾曲($d\omega/d\theta$)しながら進行する。

$$(3) \quad C'^2 = C^2(1 - \alpha/R')$$

$$(4) \quad (d\omega/d\theta) = (\alpha/R')/(1 - \alpha/R')$$

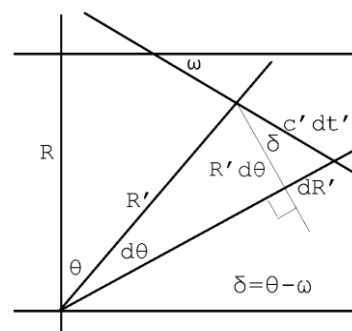


Fig.1

その時、式(2)は式(5)の如く書き換えられる。

$$(5) \quad -dS^2 + (d\omega/d\theta)dR'^2 = (1 - \alpha/R')dt'^2 - dR'^2 - R'^2 d\theta^2 = 0$$

式(5)は、光の湾曲($d\omega/d\theta$)が dS^2 の径軸 R' の非線形歪に等しいことを示している。何故ならば、式(5)の右辺は径軸 R' の非線形歪を含んでいないからである。つまり、光の湾曲($d\omega/d\theta$)は dS^2 の径軸 R' の非線形歪を打ち消している。

上記の如く、シュバルツシルト解の径軸 R' は、重力場において光が直進するように、非線形に歪んでいる。

3. 重力場における光の速度

重力場における任意の位置は、光速 C の時間軸 t' と静止空間に対する相対速度

U(R)の径軸R'からなる慣性空間に属すると仮定される。上記静止空間は光速Cの時間軸tと静止の径軸Rとからなる。そのとき、世界距離dS²は静止空間から慣性空間への座標変換において保存されるから、次式が成立する。

C'：慣性空間（重力場）の重力場中心から距離R'の位置での光の速度

C：静止空間（無重力場）の任意の位置での光の速度

i：虚数 ($i^2 = -1$)

U(R)：重力場中心から距離R'の位置での慣性空間の相対速度

$$dS^2 = (iCdt)^2 = dS'^2 = (iCdt')^2 + (U(R)dt')^2$$

$$d\theta = 0, \quad d\Phi = 0$$

光の進行距離は慣性空間に依存しない。それ故、静止空間での光の進行距離は慣性空間での光の進行距離に等しい。即ち、 $C'dt' = Cdt$ である。そのとき、次式(6)が成立する。

$$(6) \quad C'^2 = C^2 - U^2, \quad U = U(R)$$

他方、速度vの質量 $m \ll M$ が無限遠方から質量Mの重力場に進入するとき、式(7)が導出される。

$g = GM/R^2$ ：重力加速度

G：重力定数

v：無限遠方での質量mの速度

V'：重力場での質量mの速度

F：質量mに働く重力

$$(iCdt')^2 + (Udt')^2 + (vdt')^2 = (dS')^2 = (iCdt')^2 + (V'dt')^2$$

$$(Udt')^2 + (vdt')^2 = (V'dt')^2$$

$$V'^2 = v^2 + U^2$$

$$mV'^2/2 = mv^2/2 + mU^2/2$$

$$d(mv^2/2)/dR = 0$$

$$d(mV'^2/2)/dR = d(mU^2/2)/dR = F = mg = mGM/R^2$$

$$dU^2/dR = 2GM/R^2$$

$$(7) \quad U^2 = 2GM/R$$

そのとき、式(6)は次の如く書き換えられる。

$$(8) \quad C'^2 = C^2 - 2GM/R$$

$C'^2 = 0$ のとき、シュバルツシルト半径 R_s が得られる。

$$C^2 - 2GM/R = 0, \quad R = 2GM/C^2 = R_s$$

4. 重力場における光の進行方向の変化

Fig.2の如く、質量Mの重力場中心から距離Rの位置を垂直に横切って、光は進行すると仮定する。

その後、光は、回転角 θ 方向で重力場中心から距離 R' の位置に進行し、その進行方向を回転角 ω 変化させているとする。

重力場における光の進行方向の回転角速度 $d\omega/dt'$ は次式にしたがって変化すると仮定される。

$$C'(d\omega/dt') = -(dU^2/dR)\cos\delta = C'(d\omega/d\theta)(d\theta/dt')$$

そうすると、Fig.3から次式が成立する。

$$d\theta/dt' = C'\cos\delta/R'$$

$$d\omega/dt' = (d\omega/d\theta)(C'^2\cos\delta/R') = 2GM\cos\delta/R'^2$$

$$d\omega/d\theta = 2GM/C'^2R'$$

上式の C'^2 を $(C^2 - 2GM/R')$ で置き換えると、次式(9)が得られる。

$$d\omega/d\theta = (2GM/C^2R')/(1 - 2GM/C^2R')$$

$$\alpha = 2GM/C^2$$

$$(9) \quad d\omega/d\theta = (\alpha/R')/(1 - \alpha/R')$$

このように式(4)と同じ光の湾曲 $d\omega/d\theta$ が導出される。これは偶然の一致ではない。

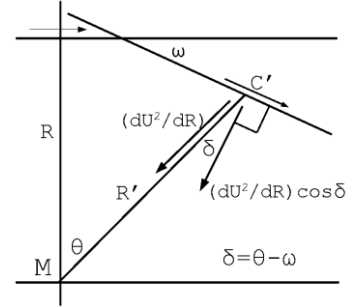


Fig.2

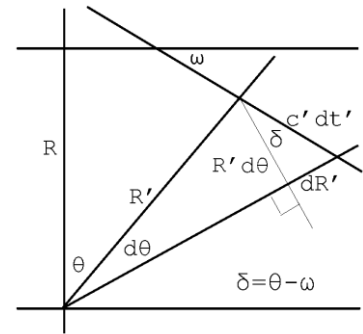


Fig.3

5. 光の湾曲の具体例

5.1 Fig.4において $R_s \ll R = R'\cos\theta$, $\alpha/R' \ll 1$ そして $\omega \ll \theta$ の場合、次の式が成立する。

$$d\omega/d\theta = (\alpha/R)\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \omega_p &= \int d\omega = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int (\alpha/R)\cos\theta d\theta \\ &= (\alpha/R)(\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)) \\ &= 2\alpha/R' = 4GM/C^2R \end{aligned}$$

この式に基づいて、太陽の周辺を通過する光の太陽の重力場による偏向角 ω_p が計算される。

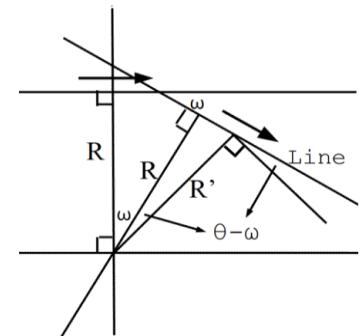


Fig.4

5.2 Fig.5において $R = \gamma R_s$ 、 $2 < \gamma$ 、 $\delta = \theta - \omega > 0$ そして $d\delta/d\theta > 0$ の場合、次の式が成立する。

$$dR' = C'dt'\sin\delta$$

$$d\theta/dt' = C'\cos\delta/R'$$

$$dR'/dt' = (dR'/d\theta)(d\theta/dt') = C'\sin\delta$$

$$(dR'/d\theta)(C'\cos\delta/R') = C'\sin\delta$$

$$d(\log R')/d\theta = \sin\delta/\cos\delta$$

$$= -d(\log(\cos\delta))/d\delta$$

$$\log R' = -\log(\cos\delta) + \log A$$

A: 積分定数

$$R'\cos\delta = R'\cos(\theta - \omega) = A, \quad \theta = \omega$$

$$R' = R = A$$

$$(10) \quad R'\cos\delta = R$$

そのとき、光の湾曲($d\omega/d\theta$) (式(4)) は次式(11)の如く書き換えられる。

$$(11) \quad d\omega/d\theta = \alpha\cos\delta/R)/(1 - \alpha\cos\delta/R)$$

$$\alpha = 2GM/C^2$$

式(11)とFig.4によれば、光の軌跡は定規を使用して描き得ると考えられる。

上式(11)は式(12)に書き換えられる。

$$(12) \quad d\delta/d\theta = (\gamma - 2\cos\delta)/(\gamma - \cos\delta) > 0$$

この光の軌跡はパラボリック曲線に似ている。

Fig.6の太線の上部に漸近的に沿って、回転角 θ が増大するにしたがって角度 $\delta = \theta - \omega$ は増大する。

太線の曲折点は、 γ の増減に対応して線($\theta = \pi/2$)上を上下する。

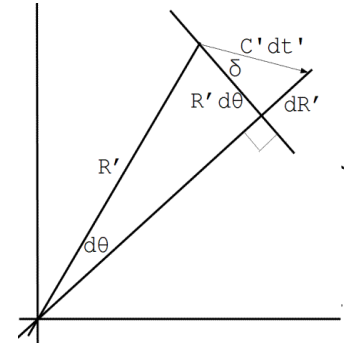


Fig.5

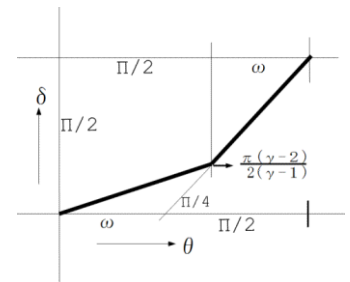


Fig.6

5.3 $1 < \gamma < 2$ 、 $R = \gamma R_s$ 、 $-\delta = \delta' = \omega - \theta > 0$ の場合

Fig. 7において、次式が成立する。

$$(dR'/d\theta)(C'\cos\delta'/R') = -C'\sin\delta'$$

$$d(\log R')/d\theta = -\sin\delta'/\cos\delta'$$

$$= d(\log(\cos\delta'))/d\delta'$$

$$\log R' = \log(\cos\delta') + \log A$$

A: 積分定数

$$R' = A\cos\delta', \quad \theta = \omega, \quad R' = R = A$$

$$R' = R\cos(\omega - \theta) = \gamma R_s(\cos\delta')$$

そのとき、式(9)は次式(13)に書き換えられる。

$$(13) \quad d\omega/d\theta = (2GM/\cos(\omega - \theta)C^2R)/(1 - (2GM/\cos(\omega - \theta)C^2R))$$

$$(14) \quad d\delta'/d\theta = (\gamma\cos\delta' - 2)/(\gamma\cos\delta' - 1) > 0$$

この光の軌跡はスパイラル曲線に似ている。

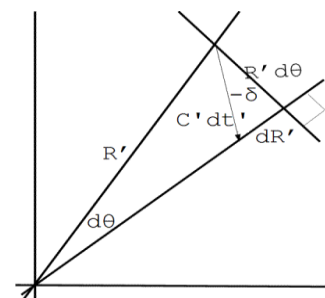


Fig. 7

5.4 $\gamma = 1$ 、 $R = R_s = 2GM/C^2$ のとき、次式が成立する。

$$C'^2 = C^2 - 2GM/R_s = C'^2 - C^2 = 0$$

$\gamma < 1$ では光は存在しえない。何故ならば C'^2 は負にならないからである。

6. 結論

以上の如く、新方法により得られる結果は、シュバルツシルト解から得られる結果と一致する。しかし、新方法による光の湾曲の計算は、簡単で、容易でかつ正確である。重力場において空間が歪んでいるから光が湾曲して進行するよう見えるのか、はたまた、重力場において光は湾曲して進行するから空間が歪んでいるよう見えるのか、の相違にすぎないと考えられる。そうすると、重力場方程式のシュバルツシルト解の径軸の非線形歪は慣性空間の連続接続により生じる非線形加速度に相当すると考えられる。